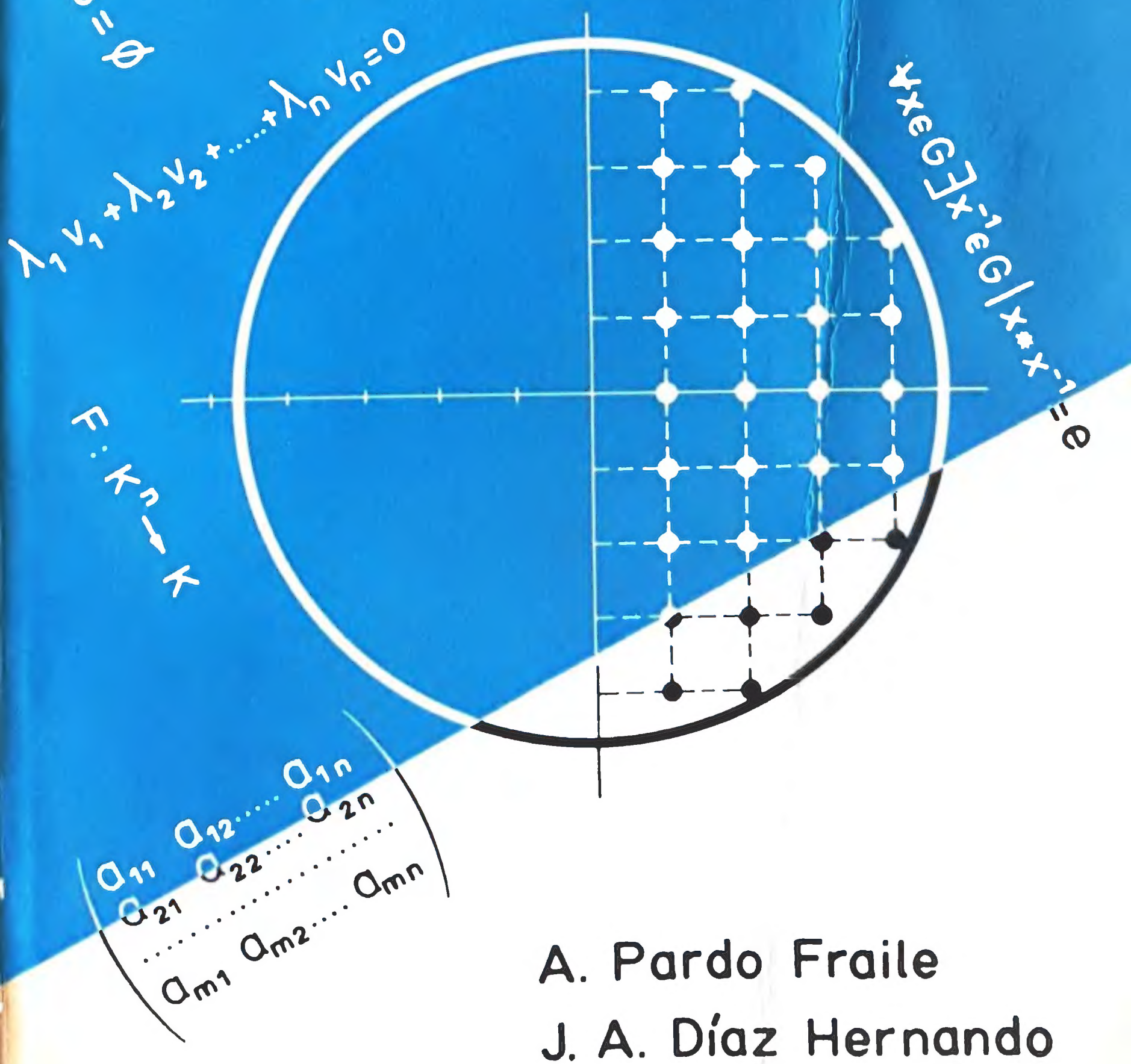
elementos de álgebra lineal y geometría

I



A. Pardo Fraile

J. A. Díaz Hernando

ELEMENTOS
DE
ALGEBRA LINEAL
Y
GEOMETRIA

por

Antonio Pardo Fraile
Licenciado en Ciencias Matemáticas
Catedrático de Instituto excedente

y

Juan-Angel Díaz Hernando
Doctor Ingeniero Industrial

TOMO I

MADRID, 1965

Prólogo

Anteponer unas líneas a un libro escrito por unos amigos y excelentes colaboradores de mi Cátedra es una tarea agradable pero no fácil si se quiera mantener un criterio objetivo. Por tanto, la crítica de este primer tomo, de los dos que constará la obra, la harán los propios alumnos que la utilicen y los profesores que la lean.

Los temas tratados se desprenden claramente de su índice general. Los abundantes ejemplos y numerosos ejercicios resueltos hacen de este libro un medio muy eficaz para la introducción al estudio del Algebra Moderna. También suavizará la brusca transición entre las Matemáticas del Bachillerato y las del primer año de las Facultades de Ciencias y Escuelas Técnicas Superiores de Ingeniería.

No quiero terminar sin congratularme del éxito que no dudo obtendrá este libro, fruto de la estrecha colaboración entre el profesor Pardo, Licenciado en Ciencias Matemáticas, y el profesor Díaz Hernando, Doctor Ingeniero Industrial.

ALEJANDRO HERNÁNDEZ DEL CASTILLO
Catedrático de Matemáticas
de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
de Madrid

Introducción

Los motivos que nos han impulsado a escribir esta modesta obra han sido, por una parte, la escasez de textos en castellano que se ajusten a los programas actuales de la asignatura de Algebra Lineal, común al primer curso de las Facultades de Ciencias y de las Escuelas Técnicas Superiores; por otra parte, el creer que, por habernos dedicado durante los últimos años a la enseñanza de las materias propias de la citada asignatura, tanto en la Facultad de Ciencias como en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid, nos capacitaba para emprender con alguna posibilidad de éxito dicha empresa.

El primer problema que se nos planteó fue el de cómo había de estructurarse el libro de manera que se ajustase al cuestionario oficial y al nivel cultural medio del alumno para el que estaba destinado.

Ajustar el libro al programa no presentó dificultades, ya que la acertada elección de los temas del mismo permite (con alguna excepción) su desarrollo articulado, poniendo de manifiesto la unidad que posee. Hemos de hacer constar, en lo que a este aspecto se refiere, que el libro "Algèbre linéaire et géométrie élémentaire", de J. Dieudonné, ha sido para nosotros fuente inagotable de inspiración.

En lo referente al nivel medio del lector, hemos tenido en cuenta:

1.º *La dificultad que supone la introducción de nuevos conceptos, por el riesgo que se corre de: desbordar al alumno, si se hace demasiado rápidamente; fatigarle, si la presentación de conceptos es demasiado exhaustiva o, lo que es todavía peor, no interesarle si se plantea en un plano demasiado abstracto.*

2.º *El curioso recelo (inexplicable para nosotros) que el estudiante siente hacia lo que se ha dado en llamar "matemática moderna".*

La primera dificultad hemos tratado de obviarla introduciendo los conceptos de la manera más convincente y natural. Siempre que ha sido posible hemos intentado justificar previamente la presentación de las nuevas ideas, ilustrándolas con ejemplos concretos familiares al lector. También hemos procurado que la teoría se fuera desarrollando de una manera natural y hemos retrasado la definición de los conceptos hasta el momento que se sintiera la necesidad de hacerlo. La parte de teoría que es realmente una herramienta auxiliar, no ha sido introducida hasta que la resolución de algún problema lo exigía.

Así, las matrices surgen con toda naturalidad en el estudio de las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales, de tal forma que al definir las operaciones entre aquéllas, no resultan tan artificiosas (singularmente la multiplicación) como cuando se dan formalmente sin una justificación previa.

La presentación del concepto de determinante como una aplicación multilineal, pudiera parecer pedante y caprichosa. No lo es tanto si se piensa que el producto escalar, el vectorial y el mixto son también aplicaciones multilineales. Por otra parte, no vemos ninguna utilidad en repetir el estudio de los determinantes tal y como se efectuó en el Bachillerato.

El tratamiento de ciertos temas ha sido necesariamente descriptivo, como consecuencia de las dificultades inherentes a los mismos. Tal ocurre con el lema de Zorn. El lector interesado en un estudio más detallado del mismo puede hacerlo en las siguientes obras: "General Topology", J. L. Kelley, y "Naive set theory", P. R Halmos.

En lo que se refiere al recelo que el alumno siente hacia la matemática moderna, creemos que es deber del profesor el hacerlo desaparecer, haciéndole ver que la matemática moderna ni es una moda caprichosa, ni viene a sustituir la matemática clásica. Lo que ocurre es que hoy día al tenerse un conocimiento más profundo de los conceptos y una visión de conjunto más amplia, es posible evitar la dispersión de esfuerzos, agrupando para su estudio, teorías en apariencia totalmente diferentes, pero que en realidad tienen profundas afinidades.

Y ahora unas palabras sobre la idea que tenemos los autores de cómo ha de emplearse este libro Al igual que para llegar a conocer un objeto físico no basta con echarle una rápida ojeada, sino que es necesario visualizarlo desde distintos ángulos, para dominar un concepto matemático no basta con memorizar una definición—aunque, naturalmente, este sea el principio del proceso—, sino que es preciso también considerarlo desde distintos puntos de vista. Los ejemplos que figuran abundantemente en el texto intentan proporcionar las distintas perspectivas que ayuden a conocer un concepto. Por eso el lector hará bien en leer detenidamente dichos ejemplos, tratando de entenderlos y, si es posible, crear otros; así como deberá intentar resolver todos los ejercicios referentes a la materia en estudio, acudiendo sólo en último extremo a las páginas finales del libro, donde se encuentran las soluciones detalladas.

Creemos que una de las ventajas de las matemáticas es su poder formativo. Por esta razón y, con objeto de que el alumno no pierda su capacidad creadora en beneficio exclusivo de la capacidad retentiva, parte de la teoría aparece en forma de ejercicios.

LOS AUTORES.

Madrid, septiembre de 1965.

1

teoría de conjuntos

El concepto de conjunto es uno de los más frecuentemente utilizados no sólo en matemáticas, sino también en la vida corriente. Aparece este concepto en matemáticas desde su nivel más elemental; el lector recordará, en efecto, que ya desde sus primeros estudios de Bachillerato se hablaba del conjunto de los números naturales, del conjunto de los puntos de una recta, del conjunto de los números primos, del conjunto de las rectas de un plano paralelas a una dada, etc.

La teoría de conjuntos tiene por objeto el estudio de las propiedades fundamentales de éstos, prescindiendo por completo de la naturaleza y propiedades particulares individuales de los entes que los constituyen.

No intentaremos aquí desarrollar con todo rigor una teoría axiomática de conjuntos. Tomaremos el concepto de conjunto como primitivo, es decir, como un concepto lógico no definido.

1.1. Conceptos previos y notación.

Los entes individuales que constituyen un conjunto se denominan sus *elementos*. Utilizaremos letras mayúsculas para denotar conjuntos y minúsculas para simbolizar elementos. Sin embargo, no nos adheriremos rígidamente a este convenio, ya que los conceptos de elemento y conjunto son relativos, pues lo que en determinado razonamiento se considera como un conjunto, en un razonamiento distinto pudiera considerarse como elemento de otro conjunto, por así decir, de orden superior. Emplearemos frecuentemente la palabra *clase* para denotar un conjunto cuyos elementos son a su vez conjuntos. Por ejemplo, una circunferencia puede considerarse como un conjunto de puntos y también como un elemento de la clase de todas las circunferencias del plano.

Al símbolo que representa un elemento cualquiera de un conjunto se le llama *variable*.

Si a es un elemento de un conjunto A, esto se denotará abreviadamente por:

$$a \in A$$

que se lee "el elemento a pertenece al conjunto A". A esta relación que liga elementos con conjuntos se le denomina *relación de pertenencia.* Si b no es un elemento del conjunto A, escribiremos:

$$b \notin A.$$

Un conjunto estará determinado cuando se posea un criterio que permita, dado un ente cualquiera, decidir si pertenece o no a dicho conjunto. Existen dos notaciones típicas para designar un conjunto. La primera, llamada por *extensión,* consiste en escribir, cuando esto es posible, una relación entre llaves de los elementos del conjunto.

EJEMPLO 1. El conjunto constituido por los tres primeros días de la semana se escribiría {lunes, martes, miércoles}.

EJEMPLO 2. El conjunto de los números naturales menores que 10, que son cuadrados perfectos, se expresaría por {1, 4, 9}.

EJEMPLO 3. {1, 2, 3, ...} es el conjunto de todos los números naturales [1] si se conviene—como es habitual en matemáticas—que los puntos suspensivos indican que si un número natural pertenece al conjunto pertenece también el siguiente.

Cuando el procedimiento anterior no es viable por la imposibilidad de relacionar todos los elementos del conjunto, se emplea el segundo procedimiento, denominado por *comprensión,* que consiste en especificar la propiedad o propiedades que caracterizan a los elementos de dicho conjunto. Así, si P denota una cierta propiedad, $\{x|P\}$ [2] representa el conjunto de todos los entes que cumplen dicha propiedad. Con objeto de evitar ciertas dificultades lógicas que pudieran presentarse (véase ejercicio número 4) supondremos siempre que todos los conjuntos que se manejen en un determinado razonamiento son tales que sus elementos pertenecen a un conjunto universal U.

EJEMPLO 4. $\{x \in R \mid 2 < x < 4\}$ es el conjunto de los números reales [3] mayores que 2 y menores que 4.

---

[1] Para designar el conjunto de los números naturales emplearemos siempre, de ahora en adelante, la letra N. Para el conjunto de los números enteros emplearemos la letra Z.

[2] La barra vertical | se leerá "tal que".

[3] Emplearemos la letra R para designar el conjunto de los números reales. También se empleará como abreviatura de relación binaria, pero en

EJEMPLO 5. $\{x \in R \mid x$ es fracción propia de denominador 5 y $0 < x < 1\}$.

Con objeto de obtener ciertos resultados con la máxima generalidad es conveniente considerar conjuntos que no tienen ningún elemento. Por ejemplo: $\{x \in R \mid x < x\}$ o $\{x \mid x$ es triángulo y tiene cuatro lados$\}$. Veremos más adelante que no existe más que un conjunto carente de elementos. Se le denominará *conjunto vacío* y se denotará por el símbolo ϕ.

EJERCICIOS

1. Exprésense por extensión los siguientes conjuntos:

a) El conjunto de los meses del año cuyo nombre contiene la letra r.

b) El conjunto de los números primos menores que 20.

c) El conjunto de todas las letras en la palabra matemáticas.

d) El conjunto de los números de puntos que se pueden obtener al arrojar dos dados.

e) El conjunto de los números enteros que satisfacen la ecuación $2x^2 - x = 0$.

f) El conjunto de los números enteros negativos mayores que 2.

2. Los conjuntos de los apartados *e*) y *f*) del ejercicio anterior ¿son el mismo conjunto?

3. En cada uno de los siguientes casos exprésese el conjunto en cuestión por extensión y si esto no es posible, hágase constar así:

a) Todos los números enteros mayores que -2 y menores que 5.

b) Todos los números reales positivos menores que 1.

c) Todos los matices de color entre el rojo y el amarillo.

d) Todos los colores básicos del arco iris.

e) Todos los números reales que cumplen la relación $x^2 - x + 1 = 0$.

f) Todas las fracciones propias de denominador 3 mayores que 0 y menores que 1.

4. *Paradoja de Russell.* Existen conjuntos que se contienen a sí mismos como elementos. Si a estos conjuntos les llamamos extraordinarios, y ordinarios a los que no se contienen a sí mismos como elementos, demuéstrese que el conjunto de todos los conjuntos ordinarios es a la vez ordinario y extraordinario.

1.2. Relación de inclusión y conjunto de las partes de un conjunto dado.

Si A y B son dos conjuntos tales que todo elemento de A pertenece a B, se dice que A *está contenido* en B o que B *contiene a*

---

ningún caso habrá riesgo de confundir el sentido en que se emplea. El conjunto de los números complejos se designará por la letra C.

A y se expresa mediante

$$A \subset B \quad \text{o} \quad B \supset A.$$

También se dice que A es un *subconjunto* o una *parte* de B. A la relación simbolizada por $\subset$ se le llama de *inclusión*. Su negación se simboliza por $\not\subset$.

Dos conjuntos, A y B, se dice que son *iguales* si poseen los mismos elementos. Esta relación se expresa mediante $A = B$ y su negación por $A \neq B$.

Como consecuencia de la definición anterior el conjunto vacío es único.

Obsérvese que la relación $A \subset B$ no excluye la posibilidad de que $A = B$. Bastaría para ello que se verificase además $B \subset A$. En el caso en que $A \subset B$ y $B \not\subset A$, es decir, cuando todo elemento de A pertenece a B, pero existe al menos un elemento de B que no pertenece a A, se dice que A es un subconjunto *propio* de B.

EJEMPLO 1. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{4, 2, 3, 1\}$ se tiene: $A \subset C$, $B \subset A$, $C \subset A$, $A \not\subset B$, luego $A = C$, $A \neq B$, B es un subconjunto propio de A.

La relación de inclusión goza de las siguientes propiedades, cuya demostración es inmediata:

I. $A \subset A$ para todo conjunto A [4].
II. $A \subset B$ y $B \subset A$ implica $A = B$ [5].
III. $A \subset B$ y $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

A la clase cuyos elementos son todos los subconjuntos de un conjunto A se le llama *conjunto de las partes de* A y se le simboliza por $\mathfrak{P}(A)$. Es evidente que ϕ y A pertenecen a $\mathfrak{P}(A)$.

EJEMPLO 2. Si $A = \{1, 2, 3\}$, entonces $\mathfrak{P}(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

EJERCICIO

Si un conjunto A consta de n elementos (siendo n un número natural cualquiera), ¿cuántos elementos tiene $\mathfrak{P}(A)$?

1.3. Operaciones elementales.

Vamos ahora a estudiar procedimientos que nos permitan obtener nuevos conjuntos a partir de conjuntos dados.

---

[4] La expresión "para todo" se simbolizará abreviadamente por $\forall$.
[5] La palabra "implica" se simbolizará por $\Longrightarrow$.

La *unión* de dos conjuntos A y B, es otro conjunto simbolizado por $A \cup B$, cuyos elementos son todos los de A, todos los de B, y nada más que éstos, es decir,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\}.$$

EJEMPLO 1. La unión del conjunto de los enteros no negativos y el conjunto de los enteros no positivos es el conjunto de todos los enteros.

EJEMPLO 2. La unión del conjunto de todos los fumadores y del conjunto de todas las personas que padecen cáncer de pulmón es el conjunto de todas las personas que fuman o padecen cáncer de pulmón (obsérvese que en dicho conjunto unión están incluidas las personas que fuman *y* padecen cáncer de pulmón, aunque aquí, naturalmente, no se afirma que una cosa sea consecuencia de la otra).

La *intersección* de dos conjuntos A y B es otro conjunto, simbolizado por $A \cap B$, cuyos elementos pertenecen a A y a B, es decir,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}.$$

EJEMPLO 3. La intersección del conjunto de todos los triángulos y del conjunto de todos los polígonos regulares es el conjunto de todos los triángulos equiláteros.

EJEMPLO 4. La intersección del conjunto constituido por todos los claveles y el conjunto de todas las flores rojas es el conjunto de todos los claveles rojos.

EJEMPLO 5. Si $A = \{x \in R \mid x \leq 2 \text{ o } x \geq 4\}$ y $B = \{x \in R \mid 2 < x < 4\}$, entonces $A \cap B = \phi$.

El último de los ejemplos anteriores pone de manifiesto la utilidad del conjunto vacío, pues sin él, en ciertos casos, la intersección de dos conjuntos no estaría definida. Cuando dos conjuntos no tienen ningún elemento común, es decir, cuando su intersección es el conjunto vacío, se dice que son *disjuntos*.

Es fácil comprobar que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, por lo cual está perfectamente definida la unión y la intersección de tres conjuntos y, por inducción, la de n conjuntos (siendo n un número natural cualquiera mayor que 1).

Las siguientes relaciones son de fácil comprobación:

I. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,
II. $A \cup U = U$, $A \cap U = A$,
III. $A \cup \phi = A$, $A \cap \phi = \phi$,
IV. $A \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$,
V. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

Si dos conjuntos A y B son tales que $A \subset B$, se llama *complementario de A respecto a B*, y se denota por $\complement_B A$ al conjunto de los elementos de B que no pertenecen a A. Cuando B es el conjunto universal U, se dice simplemente *complementario de A* y se representa por $\complement A$.

EJEMPLO 6. Si A es el conjunto de los números racionales y B el de los reales, el complementario de A respecto a B es el de los números irracionales.

EJEMPLO 7. Si B es el conjunto de los alumnos del Selectivo y A el conjunto de los alumnos aprobados a final de curso, el complementario de A respecto a B es el conjunto de alumnos del Selectivo que fueron suspendidos o no se presentaron a examen.

Es inmediato comprobar que:

I. $\complement(\complement A) = A$,
II. $\complement U = \phi$,
III. $\complement \phi = U$.

La *diferencia* entre dos conjuntos A y B, denotada por $A - B$, es el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a B.

EJEMPLO 8. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $A - B = \{1, 3\}$.

Obsérvese que si $A \subset B$, se tiene $B - A = \complement_B A$.

Como ejemplo de procedimiento de demostración de una proposición de la teoría de conjuntos probaremos una de las llamadas "leyes de De Morgan":

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B.$$

En efecto: Si $x \in \complement(A \cup B) \Longrightarrow x \notin A \cup B \Longrightarrow x \notin A$ y $x \notin B$, o lo que es igual, $x \in \complement A$ y $x \in \complement B \Longrightarrow x \in \complement A \cap \complement B$, luego $\complement(A \cup B) \subset \complement A \cap \complement B$. Por otra parte, si $x \in \complement A \cap \complement B \Longrightarrow x \notin A$ y $x \notin B \Longrightarrow$ $\Longrightarrow x \notin A \cup B \Longrightarrow x \in \complement(A \cup B)$, y, por tanto, $\complement A \cap \complement B \subset \complement(A \cup B)$. El resultado enunciado es consecuencia de ambas relaciones de inclusión.

Los llamados *diagramas de Venn* son imágenes geométricas que ayudan poderosamente a visualizar los resultados de las operaciones entre conjuntos que acabamos de definir. Consisten fundamentalmente en lo siguiente: El conjunto universal U está simbolizado geométricamente por los puntos interiores a un rectángulo; los conjuntos que se han de manejar se representan como los conjuntos

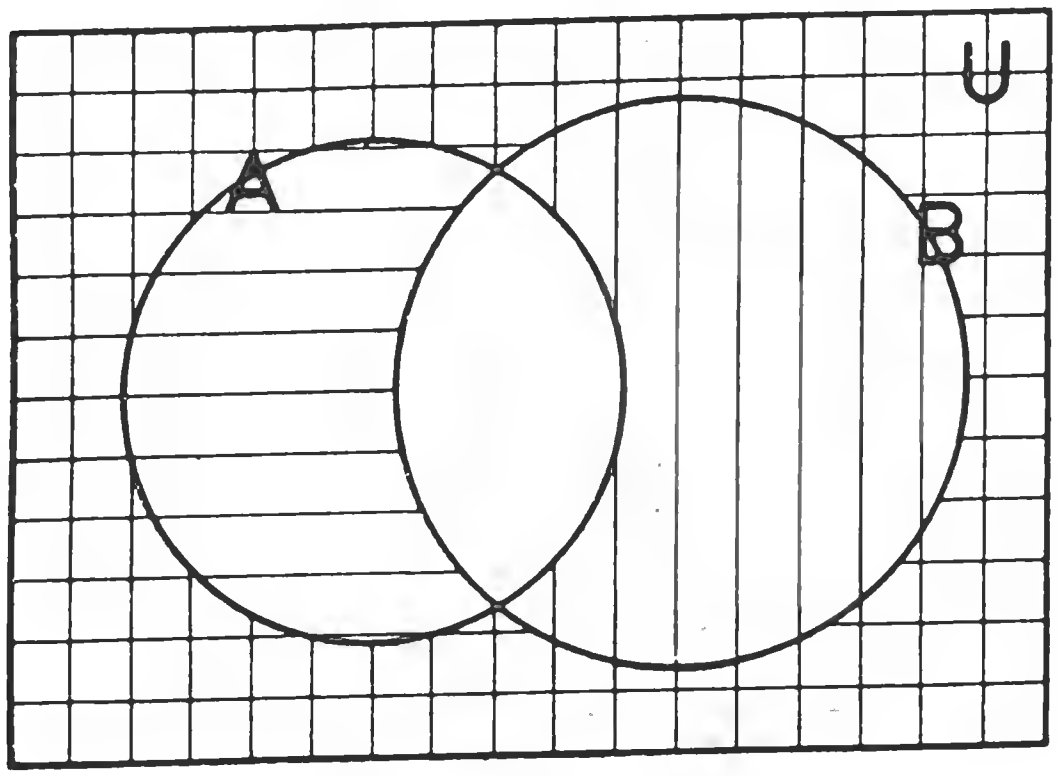


FIG. 1.

de puntos interiores y sobre circunferencias interiores a dicho rectángulo; así, en la figura 1, la parte rayada horizontalmente representa $A-B$, la rayada verticalmente $B-A$, la parte cuadriculada $\complement(A \cup B)$, y la parte sin rayar $A \cap B$.

EJERCICIOS

1. Demuéstrense las siguientes dos propiedades, llamadas distributivas:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

2. La operación diferencia entre dos conjuntos ¿es asociativa?

3. Suponiendo que un estudio estadístico haya dado los siguientes resultados: El 68% de la población española es aficionada a los toros y el 72% al fútbol, ¿qué se puede decir de los que son aficionados a los toros y al fútbol simlutáneamente?

4. Demostrar la otra ley de De Morgan:

$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B,$$

pero utilizando ahora la anterior.

5. En una clase de 75 alumnos, 60 juegan al fútbol, 50 al baloncesto y 10 ni a una cosa ni a otra, ¿cuántos alumnos practican ambos deportes?

6. Dado el siguiente diagrama de Venn exprésense simbólicamente cada una de las regiones numeradas, utilizando U, A, B, C y las operaciones unión, intersección, complementario y diferencia:

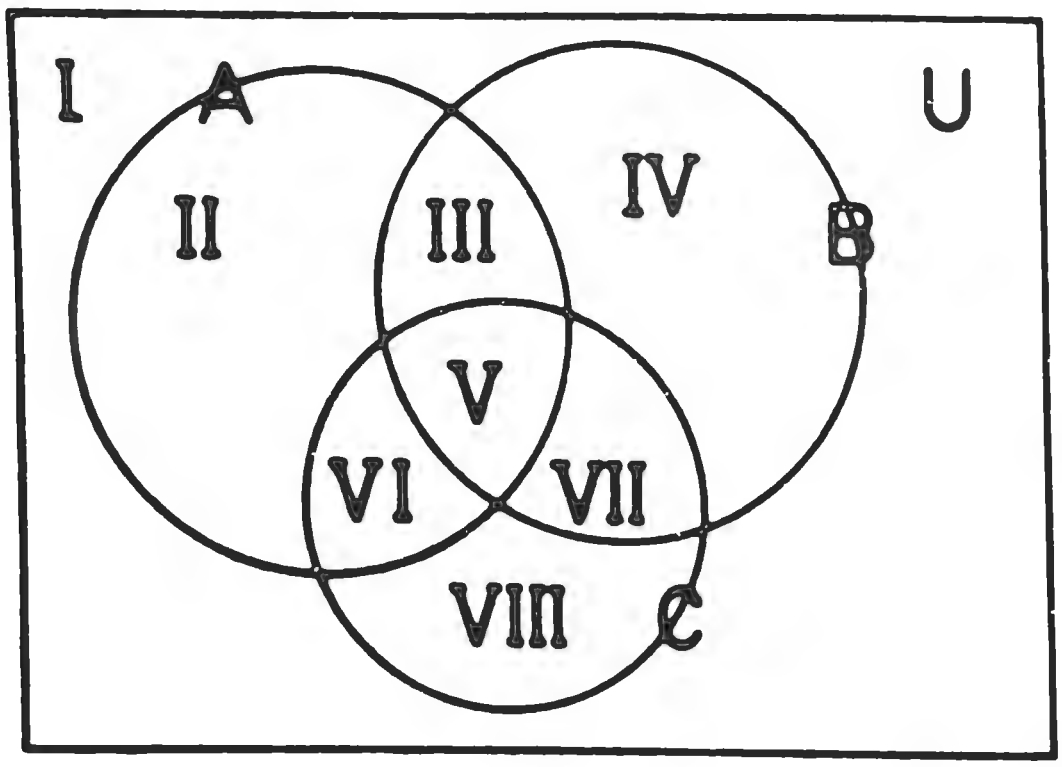


FIG. 2.

1.4. Producto de conjuntos.

Dados dos conjuntos A y B se llama *producto cartesiano* de los dos, y se representa por $A \times B$, al conjunto cuyos elementos son todas las *parejas ordenadas* (a, b), tales que el primer elemento pertenece a A y el segundo a B. La pareja (a_1, b_1) será igual a la pareja (a_2, b_2) si, y solo si, $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. A los elementos a_1 y a_2 se les llama primera y segunda coordenada de la pareja ordenada (a_1, a_2), respectivamente.

El producto cartesiano de tres conjuntos $A \times B \times C$ será el conjunto de las ternas ordenadas (a, b, c) tales que: $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$.

De manera análoga se definiría el producto cartesiano de n conjuntos, siendo n un número natural mayor que 3.

EJEMPLO 1. Una vez elegido un sistema de referencia cartesiano, el conjunto de los puntos de un plano puede considerarse como el producto cartesiano $R \times R$.

EJEMPLO 2. Una superficie cilíndrica de sección circular puede considerarse como el producto cartesiano de una circunferencia por el conjunto R.

EJEMPLO 3. El conjunto de los números fraccionarios puede considerarse como el producto cartesiano $Z \times (Z - \{0\})$.

EJEMPLO 4. Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 5, 6\}$, $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (3, 6)\}$.

Cuando los n factores de un producto cartesiano son iguales a un mismo conjunto A, se expresará dicho producto por A^n. Al subconjunto D de A^n tal que si: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D \Longrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, se le llama *diagonal* de A^n.

EJERCICIOS

1. Si los conjuntos A y B contienen, respectivamente, m y n elementos, ¿cuántos elementos contienen los conjuntos $A \times B$, $B \times A$, A^2 y B^2?

2. Sean A y B conjuntos no vacíos. Si $A_1, A_2 \subset A$, $B_1, B_2 \subset B$, pruébese que:

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

3. Pruébese que: $A \times B = \phi$ si, y sólo si, $A = \phi$ o $B = \phi$.

2

el concepto de función

Al lector, por sus estudios de Bachillerato, le resultarán familiares afirmaciones como las siguientes: "el área de un círculo es función de su radio"; "la expresión $y=2x+7$ define la variable y como función de la variable x"; "la longitud de una varilla metálica es función de la temperatura", etc. En cada caso se dispone de un procedimiento por el que se *asocia* a un elemento de un conjunto un único elemento de otro. Así, para obtener el número que mide el área de un círculo en unidades de superficie, elevamos al cuadrado el número que expresa, en las unidades correspondientes, la longitud de su radio y multiplicamos el resultado por el número π; en el segundo caso, para obtener el valor de y correspondiente a un determinado valor de x, multiplicamos éste por dos y le sumamos siete, y, por último, la longitud de la varilla correspondiente a una determinada temperatura, t, se obtendría calentando la varilla a t grados y midiéndola.

El conocimiento de una función parece, pues, que comporta el conocimiento de un conjunto de partida, otro de llegada y una regla que nos hace pasar del primero al segundo. La teoría de conjuntos nos va a permitir presentar con claridad y rigor estas ideas.

2.1. Ideas de relación binaria, función y aplicación.

Se llama *relación binaria* entre dos conjuntos A y B a todo subconjunto R del producto $A\times B$.

EJEMPLO 1. Si A es el conjunto de todos los hombres y B el conjunto de todas las mujeres, $R=\{(x, y) \mid y$ es la mujer de x, $x\in A,\ y\in B\}$ denota la relación de matrimonio.

EJEMPLO 2. $R=\left\{\left(x,\ y=\frac{x}{2}\right) \,\middle|\, x\in N,\ y\in Q\right\}$ [6] es una relación entre N y Q.

[6] Con la letra Q simbolizaremos de ahora en adelante el conjunto de los números racionales.

EJEMPLO 3. Si U es el conjunto universal, $R=\{(x, A) \mid x \in A \in \in \mathfrak{P}(U)\}$ es la relación de pertenencia.

En lugar de $(x, y) \in R$ se suele escribir xRy, lo que se lee "x está en la relación R con y". Si $(x, y) \notin R$, se escribe $x \not R y$.

Si $R \subset A \times A$ se dice que R es una relación binaria *sobre* el conjunto A.

EJEMPLO 4. Si A es el conjunto de todas las rectas del plano, $R=\{(x, y) \mid y$ es perpendicular a x, $x, y \in A\}$ es la relación de perpendicularidad entre rectas del plano.

EJEMPLO 5. Si A es un conjunto cualquiera, $R=\{(x, x) \mid x \in A\}$ es la relación de igualdad.

EJEMPLO 6. $R=\{(x, y) \mid y > x,\ x \in Q\}$ es una relación definida sobre el conjunto de los números racionales.

Se puede obtener la gráfica de una relación entre dos conjuntos A y B de la siguiente forma: los elementos de los conjuntos A y B se representan por puntos sobre sendos ejes perpendiculares entre sí; por los puntos así marcados sobre cada eje, se trazan rectas paralelas al otro; los puntos de intersección de estas rectas representan a los elementos del conjunto $A \times B$; los pertenecientes al conjunto $R \subset A \times B$ se dibujan más gruesos.

EJEMPLO 7. $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{0, 1, 2\}$, $R=\{(1, 0), (2, 2), (4, 2)\}$ su gráfica es

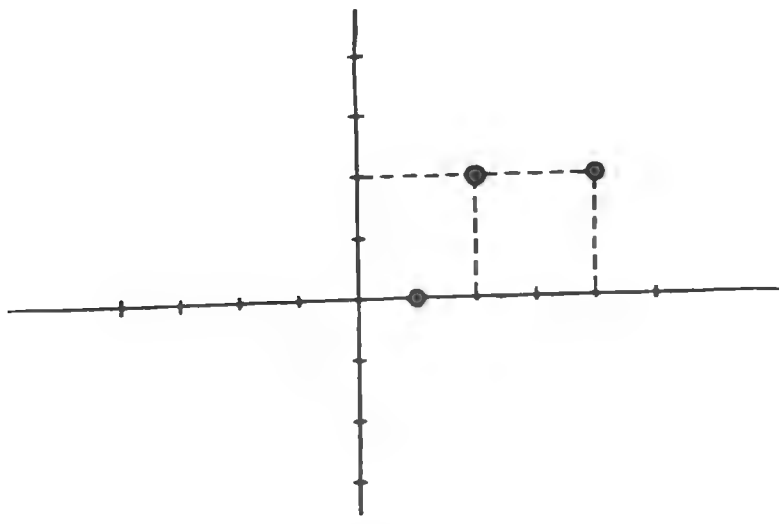


FIG. 3.

EJEMPLO 8. $A=B=Z$, $R=\{(x, y) \mid y > x+1,\ x \in Z\}$. La gráfica

de R está compuesta por todos los puntos de coordenadas enteras situados a la izquierda de la recta r.

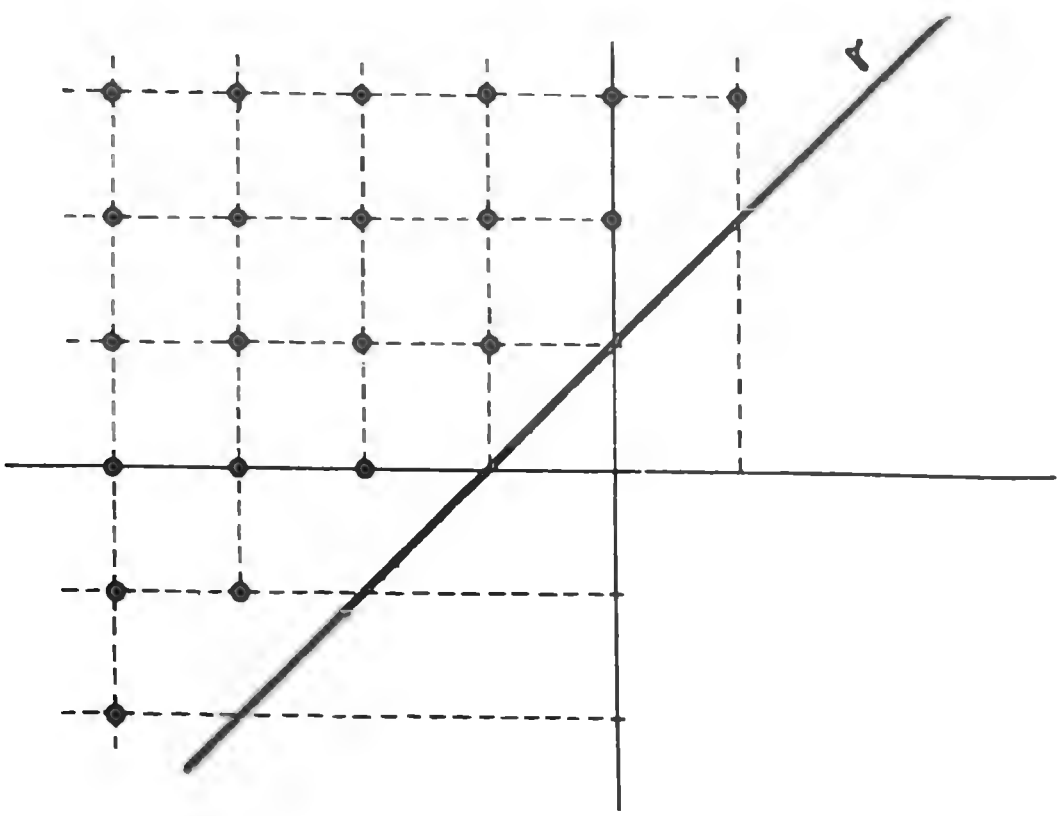


FIG. 4.

EJEMPLO 9. $A=N$, $B=Z$, $R=\{(x, y) \mid x^2+y^2<16, x \in N, y \in Z\}$. La gráfica de R está constituida por los puntos de abscisa natural y ordenada entera, interiores a la circunferencia de centro el origen y radio 4 unidades.

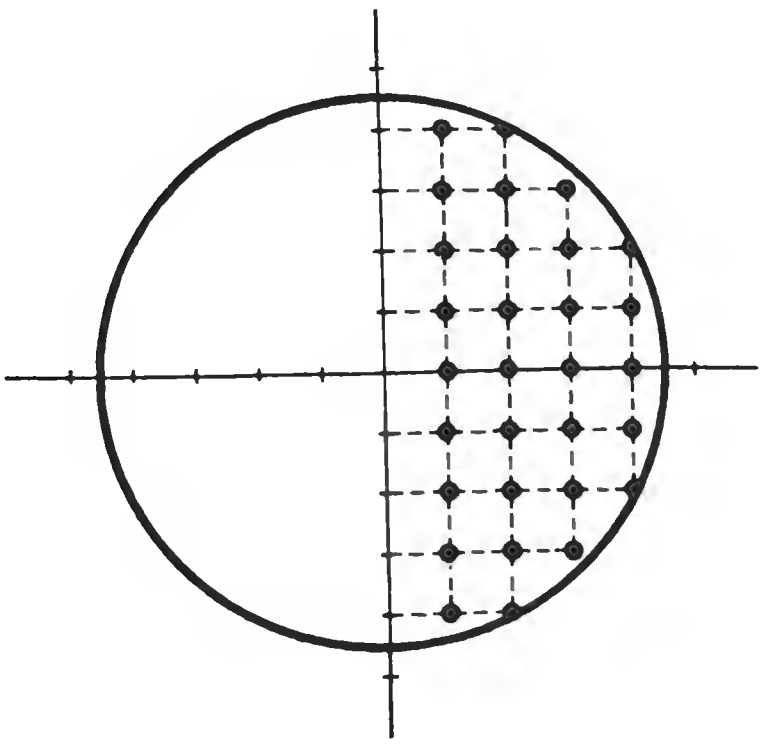


FIG. 5.

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, se llama *aplicación* de A en B a toda relación binaria F entre A y B en la que, para todo $x \in A$ existe un único $y \in B$ tal que $(x, y) \in F$. También se suele decir que F es una *función definida sobre* A y *con valores en* B, en cuyo caso al elemento y tal que $(x, y) \in F$ se le suele llamar *valor de la función* F *en* x, y se escribe habitualmente $y = F(x)$. Los términos función y aplicación son, pues, sinónimos y se emplean indistintamente en la práctica. Para indicar que F es una aplicación de A en B escribiremos $F: A \longrightarrow B$.

EJEMPLO 10. $F = \{(x, y = x^2) \mid x \in R\}$ es una función definida sobre R con valores en R.

EJEMPLO 11. Sin embargo, la relación $F = \{(x, y > x) \mid x \in R\}$ no es una función. ¿Por qué?

EJEMPLO 12. Si A es el conjunto de todos los humanos, $F = \{(x, y) \mid y$ es la madre de x, $x \in A\}$ es una aplicación de A en A.

EJEMPLO 13. Sea A el conjunto de los puntos de un plano y B el conjunto de los puntos de una recta r de dicho plano, $R = \{(x, y) \mid y$ es la proyección ortogonal de x sobre r, $x \in A\}$ es una aplicación de A sobre B.

EJEMPLO 14. Sea $A = R \times R$, $B = R$ y $F = \{((x, y), z) \mid z = x^2 + 3y, (x, y) \in R \times R, z \in R\}$ es una función. A este tipo de funciones que aplican $R \times R$ en R, se les llama *funciones reales de dos variables reales* y la notación habitual para ellas es $z = F(x, y)$.

Al conjunto A se le denomina *dominio* y también *original* de la función, y al conjunto de todas las $y \in B$ tales que existe un $x \in A$ que verifica $y = F(x)$ se le llama *imagen* de la función y también *recorrido* y se representa por $F(A)$. Si A_1 es un subconjunto de A llama *imagen directa* de A_1 por F, y se representa por $F(A_1)$, al conjunto de los elementos $y \in B$ para los que existe un $x \in A_1$ tal que $F(x) = y$. Si $B_1 \subset B$, se llama *imagen recíproca* de B_1 por F, y se representa por $F^{-1}(B_1)$, al conjunto de todas las $x \in A$ tales que $F(x) \in B_1$.

EJEMPLO 15. Si $F = \{(x, y) \mid y$ es el mayor entero contenido en x, $x \in R\}$ [7], se tiene: original de $F = R$, imagen de $F = Z$; si $A_1 = \{x \in R \mid 0 < x \leq 1\}$ entonces $F(A_1) = \{0, 1\}$ y si $B_1 = \{1, 2, 3\}$ entonces $F^{-1}(B_1) = \{x \in R \mid 1 \leq x < 4\}$.

EJEMPLO 16. Si $F = \{(x, y) \mid y = \operatorname{sen} x, x \in R\}$ se tiene que original de $F = R$, imagen de $F = \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $F^{-1}(\{0\}) = \{x = k\pi \mid k \in Z\}$.

---

[7] A esta función se le llama *parte entera* de x, y se representa en la forma $y = [x]$.

EJEMPLO 17. Si $F=\{(x, y) \mid y=\sqrt{2-x},\ x \in R,\ y \in R\}$ se tiene que original de $F=\{x \in R \mid x \leq 2\}$.

Si F es una aplicación de A en B, y A_1 y A_2 son subconjuntos de A y B_1 y B_2 lo son de B, se verifica:

I. Si $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow F(A_1) \subset F(A_2)$,
II. $F(A_1 \cup A_2)=F(A_1) \cup F(A_2)$,
III. $F(A_1 \cap A_2) \subset F(A_1) \cap F(A_2)$,
IV. $F^{-1}(B_1 \cup B_2)=F^{-1}(B_1) \cup F^{-1}(B_2)$,
V. $F^{-1}(B_1 \cap B_2)=F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2)$,
VI. $A_1 \subset F^{-1}[F(A_1)]$,
VII. $B_1 \supset F[F^{-1}(B_1)]$.

Vamos a demostrar la propiedad III y dejaremos la demostración de las restantes como ejercicio para el lector.

Si $x \in A_1 \cap A_2$ implica que $x \in A_1$ y $x \in A_2 \Longrightarrow F(x) \in F(A_1)$ y $F(x) \in F(A_2) \Longrightarrow F(x) \in F(A_1) \cap F(A_2) \Longrightarrow F(A_1 \cap A_2) \subset F(A_1) \cap \cap F(A_2)$. Sin embargo, no es cierto en general que $F(A_1 \cap A_2)= =F(A_1) \cap F(A_2)$; la función $y=x^2$ nos proporciona un contraejemplo, como se puede comprobar fácilmente en su gráfica.

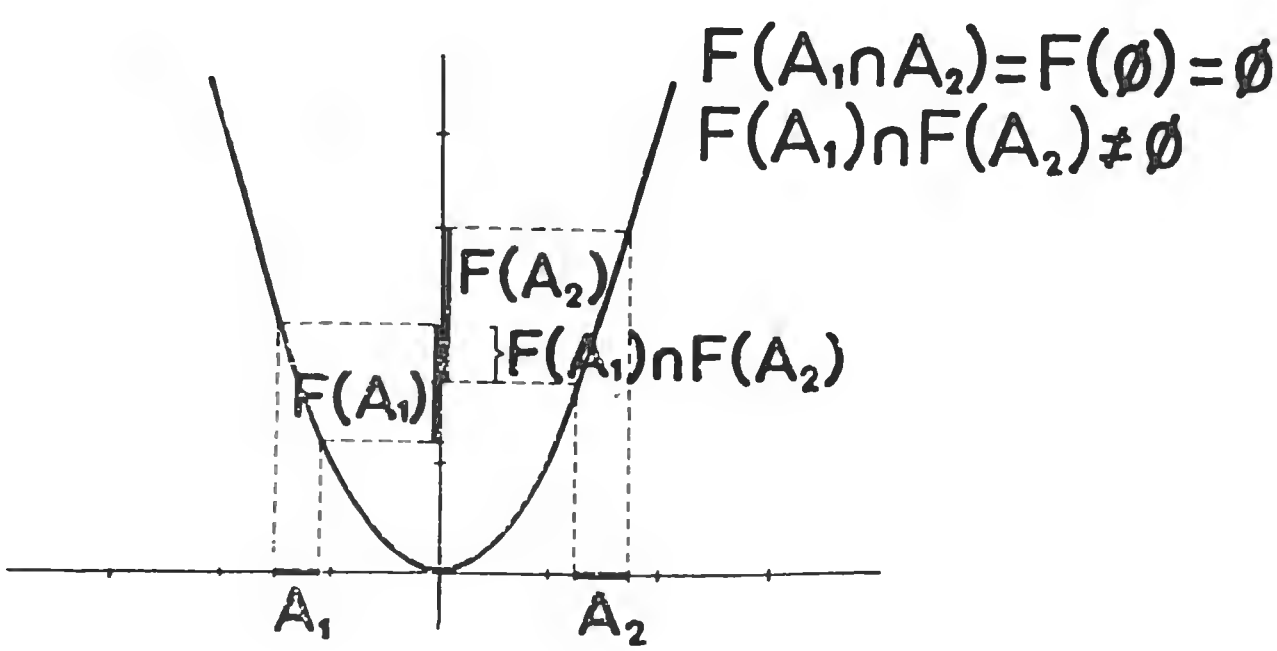


FIG. 6.

EJERCICIOS

1. ¿Cuáles, de entre las siguientes relaciones definidas sobre el conjunto de los números reales son funciones?:

a) $R=\{(x, y) \mid x^2+y^2=4\}$,
b) $R=\{(x, y) \mid y=6\}$,
c) $R=\{(x, y) \mid x=2\}$,

d) $R=\{(x, y) \mid x+y=4\}$,
c) $R=\{(x, y) \mid x=y^2\}$,
f) $R=\{(x, y) \mid x^2+y^2=9,\ y<0\}$,
g) $R=\{(x, y) \mid$ y divide a $x\}$.

2. Dígase de cuáles de entre las siguientes relaciones son funciones:
a) $A=B=$conjunto de todos los sumanos, $R=\{x, y) \mid y$ es hijo de $x\}$,
b) $A=B=$conjunto de todas las rectas de un plano, $R=\{x, y) \mid y \perp x\}$,
c) A y B como en el caso anterior, $R=\{(x, y) \mid y \perp x$, y pasa por el punto fijo $P\}$,
d) $A=B=Z$, $R=\{(x, y) \mid y=1$ si $x=\dot{2}$, $y=-1$ si $x \neq \dot{2}\}$.

3. Las siguientes gráficas representan relaciones sobre el conjunto de los números reales. ¿Cuáles de estas relaciones son funciones?

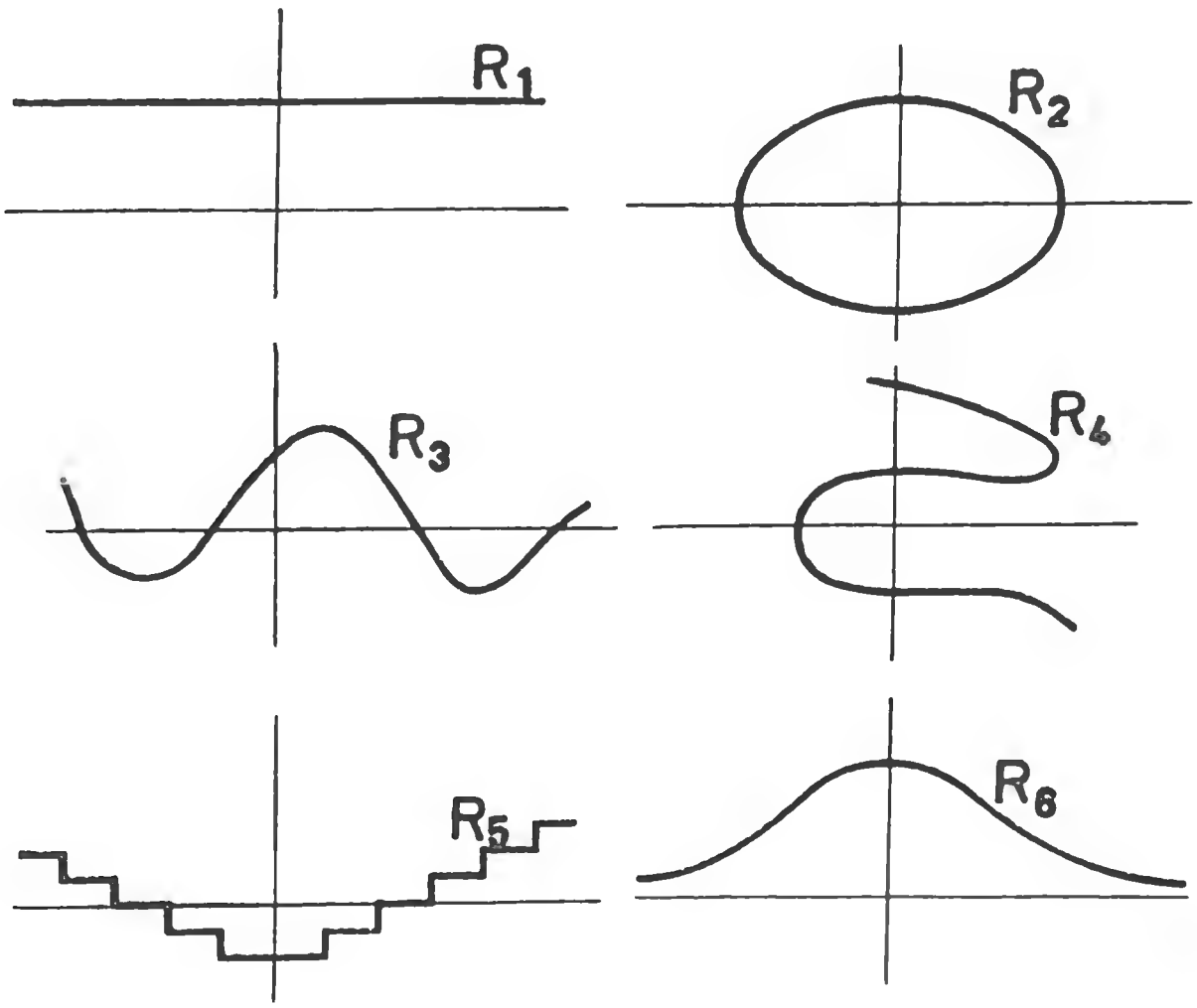


FIG. 7.

4. La relación $R=\{(x, y) \mid y=x-[x],\ x \in R\}$, ¿es una función? En caso afirmativo, ¿cuál es la imagen de la función?, ¿a qué es igual $F(Z)$?

5. La relación $S=\{(x, y) \mid xy=1\}$ definida sobre el conjunto de los números reales ¿es una función? ¿Y si se define sobre el conjunto $R^*=R-\{0\}$?

6. Supóngase que se hubiese dado la siguiente definición de función:

"Dados dos conjuntos A y B se llama función definida sobre A con valores en B a toda regla F que a cada elemento $x \in A$ le hace corresponder uno y sólo un elemento de B que se denota por $F(x)$." Con esta definición ¿serían la misma las funciones $F(x)=x^2-4$ y $G(x)=(x-2)(x+2)$, definidas sobre el conjunto de los números reales? ¿Y si la definición fuera la dada en el texto?

7. Si $F: R \times R \longrightarrow R$ tal que $F=\{((x, y), z) \mid z=x\}$, ¿cuál es la imagen inversa del conjunto $B_1=\{z \in R \mid 2 \leq z \leq 3\}$?

8. Sea $A=B$ conjunto de los puntos del plano, O un punto fijo y $K \neq 0$ un número real fijo. La relación $F=\{(x, y) \mid O, x, y,$ están alineados y $\overline{Oy}= =k \cdot \overline{Ox}\}$ ¿es una función?

2.2. Aplicaciones sobreyectivas, inyectivas y biyectivas.

Si una aplicación $F: A \longrightarrow B$ es tal que todo elemento de B es la imagen por F de al menos un elemento de A, es decir, cuando $F(A)=B$, se la llama *aplicación sobreyectiva.* Si todo elemento de B es imagen por F de a lo sumo un elemento de A, es decir, cuando $F(x')=F(x'')$ implica $x'=x''$, la aplicación recibe e lnombre de *inyectiva.* Si todo elemento de B es imagen de un elemento de A y sólo de uno, la aplicación se denomina *biyectiva,* es decir, una aplicación es biyectiva cuando es sobreyectiva e inyectiva.

EJEMPLO 1. Si $A=\{1, 2, 3\}$ y $B=\{a, b, c, d\}$, $F=\{(1, c), (2, a), (3, d)\}$ es una aplicación inyectiva, pero sobreyectiva.

EJEMPLO 2. Si $A=R$, $B=\{x \in R \mid x \geqq 0\}$, $F=\{(x, y) \mid y=x^2, x \in R\}$ es una aplicación sobreyectiva, pero no inyectiva. En efecto, se tiene, por ejemplo, $F(1)=F(-1)$.

EJEMPLO 3. Si $A=B=\mathfrak{P}(U)$, la aplicación $F=\{(X, Y) \mid Y=\complement X, X \in \mathfrak{P}(U)\}$ es biyectiva.

A toda aplicación biyectiva de un conjunto en sí mismo se le llama *transformación.*

EJEMPLO 4. En geometría se estudian las transformaciones elementales del plano (o del espacio): traslaciones, giros, simetrías y homotecias.

EJERCICIOS

1. La función F del Ej. 7 del párrafo anterior ¿es inyectiva?, ¿es sobreyectiva?, ¿es biyectiva?, ¿y la del Ej. 8?

2. Dígase de qué tipo es cada una de las siguientes aplicaciones de R en R.

a) $F=\{(x, y)\,|\,x+y=1\}$,

b) $F=\left\{(x, y)\,|\,y=\dfrac{x}{x^2+1}\right\}$,

c) $F=\{(x, y)\,|\,y=x^3\}$,

d) $F=\{(x, y)\,|\,y=2^x\}$.

3. Demuéstrese que si la aplicación $F:A\longrightarrow B$ es inyectiva, se verifica $F^{-1}[F(A_1)]=A_1$ para todo $A_1\subset A$.

4. Si F es sobreyectiva demusétrese que $F[F^{-1}(B_1)]=B_1$ para todo $B_1\subset B$.

2.3. Función inversa.

Se llama *inversa de una relación* a la relación obtenida cambiando entre sí las coordenadas de todas las parejas ordenadas de la relación dada.

EJEMPLO 1. La inversa de la relación $R=\{(1, b), (2, a), (3, a), (4, c), (2, b)\}$ es la $R^{-1}=\{(b, 1), (a, 2), (a, 3), (c, 4), (b, 2)\}$.

Si F es una aplicación biyectiva, la relación inversa es una aplicación que se denota por F^{-1} y se llama aplicación o función *inversa*.

Desde luego, si F no es biyectiva, la relación inversa no es una aplicación.

EJEMPLO 2. Si $A=B=R$, la aplicación $F=\{(x, y)\,|\,y=x^3\}$ es biyectiva y $F^{-1}=\{(x, y)\,|\,y=\sqrt[3]{x}\}$.

NOTA. No debe confundirse la función inversa de una función con la inversa de dicha función. Así, la función inversa de $y=x^3$ hemos visto que es $y=\sqrt[3]{x}$, mientras que la inversa de la función sería $y=1/x^3$.

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que si una función es biyectiva su inversa también lo es.

2. ¿Cuál es la función inversa de la función del Ej. 8 de [2.1]?

3. ¿Admiten función inversa las funciones $y=\operatorname{sen} x$, $y=x^2$, $y=2x+3$?

4. ¿Cuáles de entre las siguientes funciones, dadas por sus gráficas, admiten función inversa?

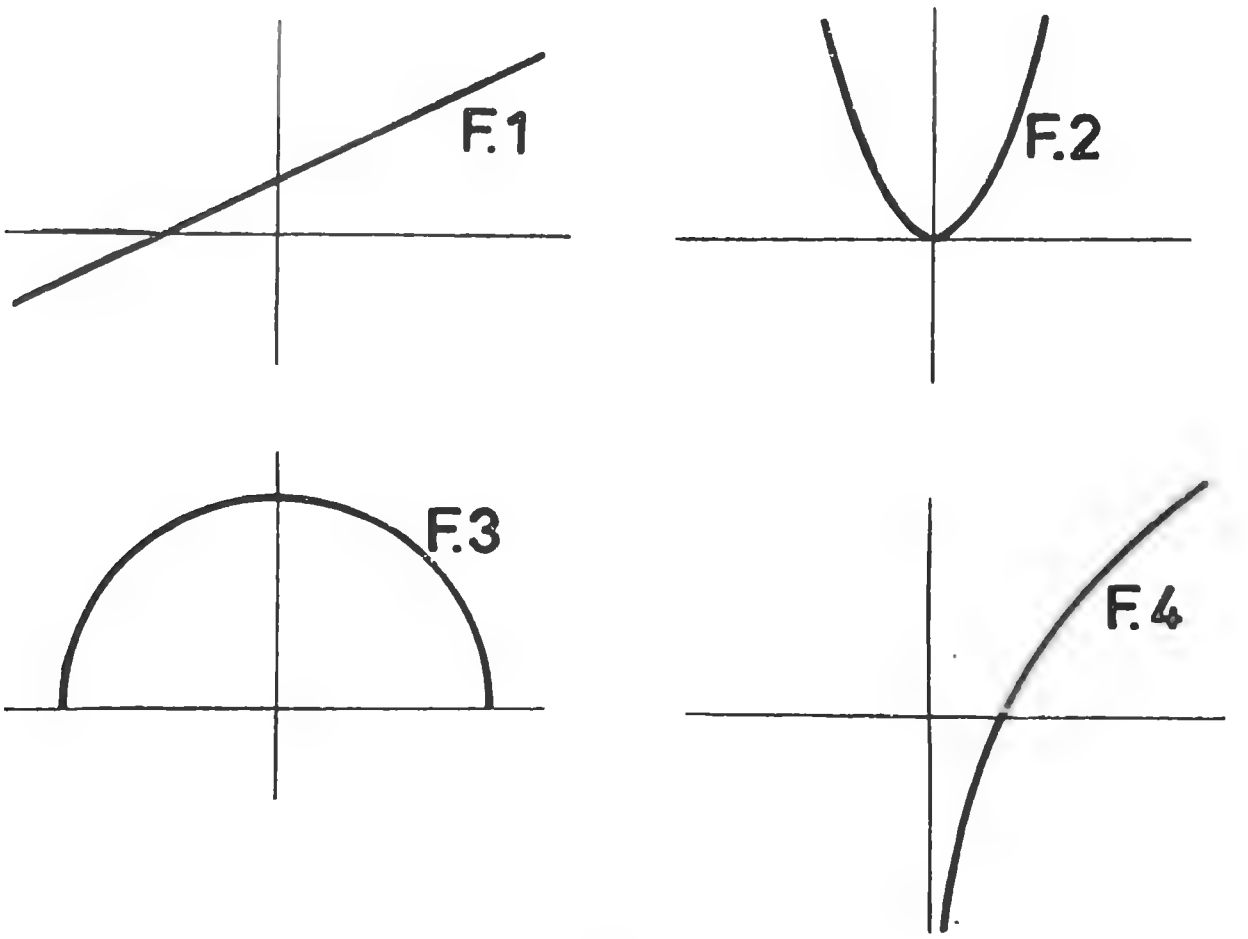


FIG. 8.

5. Dibújense las gráficas de las relaciones inversas de las del ejercicio anterior.

2.4. Conjuntos equipotentes. Conjuntos infinitos.

Se dice que un conjunto B es equipotente con otro A cuando existe una biyección F de A en B. Como en este caso, F^{-1} es una biyección de B en A, se tiene entonces que A es equipotente con B. Se suele decir simplemente que A y B son equipotentes.

EJEMPLO 1. Los conjuntos $A=\{1, 2, 3\}$ y $B=\{a, b, c\}$ son equipotentes, ya que $F=\{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ es una biyección de A en B.

EJEMPLO 2. El conjunto de los números enteros Z y el conjunto de los números $2Z$ son equipotentes. En efecto, $x \longrightarrow 2x$ es una biyección de Z en $2Z$.

Se dice que un conjunto es *finito* si no es equipotente con nin-

guno de sus subconjuntos propios. En caso contrario, el conjunto se llama *infinito.*

EJEMPLO 3. El conjunto $A=\{1, 2, 3\}$ es evidentemente finito.

EJEMPLO 4. El conjunto Z es infinito, pues, como hemos visto, es equipotente con $2Z$ que es un subconjunto propio de él.

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que si un conjunto A es finito, toda aplicación inyectiva de A en sí mismo es sobreyectiva, y recíprocamente.

2. Demuéstrese que el conjunto de los números enteros Z y el de los naturales N son equipotentes. Se dice que todo conjunto equipotente con el de los números naturales es un *conjunto numerable.* Así, pues, el conjunto de los números enteros es numerable.

3. Demuéstrese que el conjunto de los números racionales es numerable.

4. Demuéstrese que si A es numerable y $B \subset A$ entonces B es finito o numerable.

2.5. Concepto de familia. Extensión de las operaciones $\cup$ e $\cap$ a una familia de conjuntos.

En determinadas ocasiones interesa hacer resaltar el dominio de ciertas funciones. Cuando esto ocurre, la terminología y notación sufren una transformación radical. Así, toda aplicación F del conjunto N de los números naturales en cualquier otro conjunto se llama *sucesión* y, en lugar de escribir $F(n)$ se suele escribir x_n. A los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ se les llama *términos* de la sucesión y al x_n *término genérico.*

EJEMPLO 1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ es una sucesión de números racionales.

EJEMPLO 2. Si $I_n=\{x \in R \mid -n<x<n\}$, entonces $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ es una sucesión de intervalos.

EJEMPLO 3. Si $C_n=\{(x, y) \in R \times R \mid x^2+y^2 \leq n^2\}$, $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ es una sucesión de círculos (en cada uno de ellos está incluida la circunferencia que constituye su borde o frontera).

Una generalización del concepto de sucesión es la siguiente:

dado un conjunto I cualquiera, se llama *familia de elementos* de A con índices en I, a una aplicación cualquiera F de I en A,

$$F: \begin{array}{l} I \longrightarrow A \\ i \longrightarrow x_i \end{array}$$

Al conjunto I se le denomina *conjunto de índices* y la familia suele denotarse de la siguiente forma $\{x_i\}_{i \in I}$

EJEMPLO 4. Si I es el conjunto de todos los números reales positivos, que se suele denotar por R_+^*, y $C_i = \{(x, y) \in R \times R \mid i \leq x \leq i, \ -i \leq y \leq i\}$ entonces $\{C_i\}_{i \in R_+^*}$ es una familia de conjuntos de puntos del plano interiores y sobre cuadrados de lado $2i$.

Se pueden extender ahora las definiciones dadas de unión e intersección de un número finito de conjuntos, a familias cualesquiera de conjuntos.

Dada una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de un conjunto U, se denota por $\bigcup_{i \in I} A_i$ al conjunto de todos los elementos $x \in U$ tales que $x \in A_i$ para al menos un $i \in I$, y se le llama *unión de la familia* $\{A_i\}_{i \in I}$.

EJEMPLO 5. $A_i = \left\{ x \in R \,\middle|\, -1 + \frac{1}{i} \leq x \leq 1 - \frac{1}{i} \right\}$, $\forall i \in N$ se tiene que $\bigcup_{i \in N} A_i = \{x \in R \mid -1 < x < 1\}$.

Se llama *intersección de la familia* $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de U al conjunto, denotado por $\bigcap_{i \in I} A_i$, de los elementos $x \in U$ tales que $x \in A_i \ \forall \, i \in I$.

EJEMPLO 6. Si los $A_i = \left\{ x \in R \,\middle|\, -1 + \frac{1}{i} \leq x \leq 1 - \frac{1}{i} \right\}$ entonces $\bigcap_{i \in N} A_i = \{0\}$.

EJERCICIOS

1. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ e $I_1 \subset I$, a $\{A_i\}_{i \in I_1}$ se le llama *subfamilia* de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$. Demuéstrese que si $I_1 \subset I_2 \subset I$, entonces

$$\bigcup_{i \in I_1} A_i \subset \bigcup_{i \in I_2} A_i \quad \text{e} \quad \bigcap_{i \in I_1} A_i \supset \bigcap_{i \in I_2} A_i.$$

2. Si $C_i = \{(x, y) \in R \times R \mid x + y = i\}$ $\forall i \in R$. ¿Cuáles son, desde el punto de vista geométrico, los conjuntos C_i y $\bigcup_{i \in R} C_i$?

3. Si $A_i=\{(x, y) \in R\times R \mid y=ix\}\ \forall i \in R$. ¿Cuáles son, desde el punto de vista geométrico, los conjuntos A_i e $\bigcap_{i\in R} A_i$?

2.6. Recubrimiento y partición de un conjunto.

Dado un conjunto $A \subset U$ se llama *recubrimiento* de A, a toda familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de U tal que si $x \in A$ existe al menos un $i \in I$ para el que $x \in A_i$. Evidentemente, si $\{A_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de $A \Longrightarrow A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

EJEMPLO 1. Si $A_n=\{x \in R \mid -n \leq x \leq n\}$ la familia $\{A_n\}_{n\in N}$ es un recubrimiento de R.

EJEMPLO 2. En cambio, si $A_n=\{x \in R \mid n < x < n+1\}$, la familia $\{A_n\}_{n\in Z}$ no es un recubrimiento de R, pues, por ejemplo, para $x=2$ no existe ningún $n \in Z$ tal que $x \in A_n$.

EJEMPLO 3. La familia $\{x\}_{x\in A}$ es un recubrimiento del conjunto A.

Se llama *partición* del conjunto A a una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de A, tal que

1. $\{A_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de A.
2. $A_i \neq \phi\ \forall\, i \in I$.
3. $A_i \cap A_j=\phi\ \forall\, i, j \in I \qquad i \neq j$.

EJEMPLO 4. Los grupos de alumnos del curso Selectivo constituyen una partición de dicho curso.

EJEMPLO 5. El conjunto de los números enteros positivos, el de los enteros negativos y el constituido por el cero, forman una partición del conjunto de los enteros.

EJEMPLO 6. El recubrimiento del conjunto R dado en el ejemplo 1 anterior no es una partición de R, pues si $n < m$ se tiene $A_n \subset A_m$ y, por tanto, $A_n \cap A_m = A_n \neq \phi$.

EJEMPLO 7. Si $A_n=\{x \in R \mid n \leq x < n+1\}$ la familia $\{A_n\}_{n\in N}$ es una partición del conjunto $A=\{x \in R \mid x \geq 1\}$.

EJERCICIOS

1. Si A es un conjunto cualquiera, la familia $\{x\}_{x\in A}$ ¿es una partición de A?

2. Las familias $\{C_i\}_{i\in R}$ y $\{A_i\}_{i\in R}$ de los Ejs. 2 y 3 del párrafo anterior ¿son recubrimientos del plano?, ¿son particiones?

3. El conjunto de los cursos de la carrera de Ingeniero Industrial ¿es una partición del conjunto de todos los alumnos de la Escuela?

4. Sea E_i la superficie esférica de radio i y centro el punto fijo O. La familia $\{E_i\}_{i\in Q_+}$ ¿es un recubrimiento del espacio?

5. Sea $A_i=\{(x,\ y)\,|\,y=ix^2\}\ \forall i\in R$. La familia $\{A_i\}_{i\in R}$ ¿es una partición de $R\times R$?

2.7. Composición de aplicaciones.

Sean las aplicaciones

$$F:\ A\longrightarrow B$$
$$G:\ B\longrightarrow C,$$

a partir de ellas se puede definir una nueva aplicación

$$H:\ A\longrightarrow C$$

poniendo: $H(x)=G[F(x)]$ para todo $x\in A$. Se dice que la aplicación H es la *composición* de las F y G y se escribe $H=G\circ F$. También se suele decir que H es la *función producto* de las F y G.

EJEMPLO 1. Si $f(x)=3x+2$ y $g(x)=\text{sen } x \Longrightarrow g\circ f(x)=g[f(x)]=$ $=\text{sen }(3x+2)$.

EJEMPLO 2. Si $f(x)=$ padre de $x \Longrightarrow f\circ f(x)=f^2(x)=$ abuelo paterno de x.

TEOREMA 1. *Si*

$$F:\ A\longrightarrow B$$
$$G:\ B\longrightarrow C$$
$$H:\ C\longrightarrow D$$

son aplicaciones, se verifica

$$(H\circ G)\circ F=H\circ(G\circ F)\qquad (\textit{propiedad asociativa}).$$

Demostración. En primer lugar, $(H\circ G)\circ F$ está definida, puesto que $H\circ G:\ B\longrightarrow D$ y $F:\ A\longrightarrow B$; también lo está $H\circ(G\circ F)$, ya que $H:\ C\longrightarrow D$ y $G\circ F:\ A\longrightarrow C$. En primer lugar, si x es un elemento cualquiera de A:

$$[(H\circ G)\circ F](x)=(H\circ G)[F(x)]=H\{G[F(x)]\}=H\{[G\circ F](x)\}=$$
$$=\{H\circ[G\circ F]\}(x),\quad \text{luego}\quad (H\circ G)\circ F=H\circ(G\circ F)$$

como queríamos demostrar.

En virtud del teorema anterior está definido el producto de tres funciones tales que

$$F\colon\ A \longrightarrow B, \qquad G\colon\ B \longrightarrow C, \qquad H\colon\ C \longrightarrow D.$$

De manera análoga se vería que está definido el producto de un número finito de funciones, siempre que los dominios y recorridos correspondientes cumplan las necesarias condiciones.

EJERCICIOS

1. Si F y G son dos funciones y $G \circ F$ está definida, puede ocurrir que $F \circ G$ no lo esté. Póngase un ejemplo. Aun estando definidos los productos $G \circ F$ y $F \circ G$ no se verifica en general que $G \circ F = F \circ G$. Dése un ejemplo que ilustre este punto.

2. Demuéstrese que el producto de dos funciones biyectivas, caso de estar definido, es también una función biyectiva.

3. Hállese la transformación compuesta de dos simetrías planas de ejes paralelos o concurrentes.

4. Si $F_1(x)=x$, $F_2(x)=\dfrac{1}{x}$, $F_3(x)=1-x$, $F_4(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $F_5(x)=\dfrac{x-1}{x}$, y $F_6(x)=\dfrac{x}{x-1}$; hállense:

a) $F_1 \circ F_2(x)$
b) $F_2 \circ F_3(x)$
c) $F_3 \circ F_2(x)$
d) $F_2 \circ F_4(x)$
e) $F_2 \circ F_5(x)$
f) $F_4 \circ F_5(x)$
g) $F_5 \circ F_6(x)$
h) $F_6 \circ F_5(x)$
i) $F_3 \circ F_6(x)$

5. Si F y G son transformaciones de A, pruébese que $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$.

3

relaciones de equivalencia

El símbolo de igualdad $=$ ha sido utilizado anteriormente en varias ocasiones. Concretamente, en [1.2] al definirse la igualdad de conjuntos y, nuevamente en [1.4] al tratar el concepto de pareja ordenada. En ambos casos, la idea involucrada es la de identidad. Pero, ¿qué idea nos sugiere la palabra *idéntico*? Intuitivamente dos entes son idénticos cuando son el mismo ente o, dicho de otra forma, cuando toda propiedad que sea cierta para uno es también cierta para el otro.

Sin embargo, el lector ha visto y manejado igualdades tales cc no la siguiente:

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$$

Es evidente que el símbolo de igualdad no representa en este caso identidad, ya que las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ son ciertamente distintas.

En lo que sigue veremos que la igualdad anterior es una forma incorrecta, pero habitual y muy cómoda, de expresar la identidad entre ciertas clases obtenidas a partir de una relación binaria que, por así decir, da una medida de lo iguales que son ciertos entes en lo que se refiere a determinadas propiedades con exclusión de otras.

3.1. Definición de relación de equivalencia.

Una relación binaria sobre un conjunto A se llama *relación de equivalencia* sobre el conjunto A y se simboliza por $\sim$, si cumple las propiedades siguientes:

E_1. $x \sim x \quad \forall \quad x \in A$ (propiedad reflexiva),
E_2. $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$ (propiedad simétrica),
E_3. $x \sim y$ e $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$ (propiedad transitiva).

EJEMPLO 1. La equipotencia de conjuntos es una relación de equivalencia sobre $\mathfrak{P}(U)$, siendo U un cierto conjunto universal. En efecto, la aplicación $f(x)=x\ \forall\ x\in A$, llamada la *transformación idéntica* de A, es biyectiva, luego se cumple E_1; E_2 es consecuencia del Ej. 1 de [2.3] y E_3 del Ej. 2 de [2.7].

EJEMPLO 2. El paralelismo de rectas en sentido amplio ($x\|y$ si $x\cap y=\phi$ o si $x=y$) es una relación de equivalencia sobre el conjunto de las rectas de un plano. La comprobación es inmediata.

EJEMPLO 3. Si A es el conjunto de todas las fracciones, es decir, el conjunto de todas las parejas ordenadas de números enteros $\frac{a}{b}$ tales que $b\neq 0$, la relación $\frac{a}{b}\sim\frac{a'}{b'}$ si $ab'=ba'$ es una relación de equivalencia sobre dicho conjunto. Compruébese.

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que la relación $a\sim b$ si $a-b=\dot{p}$, donde p es un número entero fijo, es una relación de equivalencia sobre el conjunto de los números enteros Z.

2. La relación de inclusión entre los elementos de $\mathfrak{P}(U)$ no es una relación de equivalencia, ¿por qué?

3. La relación aRb si $|a-b|\leq 1$ no es de equivalencia sobre el conjunto de los números enteros, ¿por qué?

4. La relación aRb si $a=\dot{3}$ y $b=\dot{3}$ no es una relación de equivalencia sobre el conjunto de los números enteros, ¿por qué?

5. Demuéstrese que las tres propiedades definidoras de una relación de equivalencia sobre un conjunto son independientes.

6. Demuéstrese que la relación $a\sim b$ si $a+b=\dot{2}$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de los números enteros.

3.2. Clases de equivalencia, representantes de clase y conjunto cociente.

Dada una relación de equivalencia sobre un conjunto A, al conjunto $C_x=\{y\in A\mid y\sim x\}$ se le llama *clase de equivalencia* del elemento x. A cada uno de los elementos de una clase de equivalencia se le llama *representante de clase.*

EJEMPLO 1. En el ejemplo 3 del párrafo anterior $C_{2/3}=\left\{\frac{2k}{3k}\,\middle|\, k\in Z-\{0\}\right\}$, y un representante de clase de $C_{2/3}$ sería, por ejemplo, $\frac{4}{6}$.

EJEMPLO 2. Las clases de equivalencia en el Ej. 1 del párrafo anterior son $C_0=\{x\in Z \mid x=\dot{p}\}$, $C_1=\{x\in Z \mid x-1=\dot{p}\}$, ..., $C_{p-1}=\{x\in Z \mid x-p+1=\dot{p}\}$. Luego en este caso no hay más que p clases.El lector recordará que esta relación la ha estudiado ya en el Bachillerato con el nombre de congruencia de número enteros, módulo p $(a\equiv b(p))$.

TEOREMA 1. *Si* F *es una función sobre* A *con valores en* B, *la relación* $x' \sim x''$ *si* $F(x')=F(x'')$, *es una relación de equivalencia sobre* A.

La demostración es inmediata.

Vamos a ver ahora que toda relación de equivalencia es de este tipo.

TEOREMA 2. *Dos clases de equivalencia* C_x *y* C_y *son disjuntas o coinciden.*

Demostración. Si $C_x \cap C_y \neq \phi$ existe al menos un elemento $z \mid z\in C_x$ y $z\in C_y \Longrightarrow z\sim x$ y $z\sim y$, y de ambas y de E_2 y $E_3 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow x\sim y$. Si $t\in C_x \Longrightarrow t\sim x$, de ésta y de la última relación anterior $\Longrightarrow t\sim y \Longrightarrow t\in C_y \Longrightarrow C_x\subset C_y$. De manera análoga se demostraría que $C_y\subset C_x$. Luego, en definitiva, si $C_x\cap C_y\neq\phi \Longrightarrow$ $\Longrightarrow C_x=C_y$.

Al conjunto de todas las clases de equivalencia determinadas por una relación de equivalencia R sobre un conjunto A, se le llama *conjunto cociente de A* respecto a R y se denota por A/R.

Para que quede justificada por completo la afirmación que precede al enunciado del teorema 2, basta considerar la aplicación $F\colon A\longrightarrow A/R$ definida mediante $F(x)=C_x$. A esta aplicación se le llama *aplicación canónica.*

EJEMPLO 3. El conjunto cociente de A respecto a R, correspondiente al ejemplo 2 de [3.1], es el conjunto de todas las direcciones del plano.

EJEMPLO 4. En el caso del ejemplo 3 de [3.1], a cada una de las clases de equivalencia se le llama *número racional* y el conjunto cociente es, por consiguiente, el conjunto de los números racionales. Cuando se escribe $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ lo que se pretende expresar es lo siguiente: "el número racional, uno de cuyos representantes de clase es $\frac{2}{3}$, es igual al número racional, uno de cuyos representantes de clase es $\frac{4}{6}$". Así, lo que parecía una incorrección se reduce a una abreviatura útil en la práctica.

EJERCICIOS

1. Sea A el conjunto de los puntos del plano y B el conjunto de los puntos de una recta r de dicho plano. Sobre $A-B$ se define la relación $x \sim y$ si el segmento de extremos x e y no corta a la recta r. Demuéstrese que es una relación de equivalencia. ¿Qué es el conjunto cociente?

2. El conjunto A, el del ejercicio anterior, y O un punto fijo de ese plano. Sobre el conjunto $A-\{O\}$ se define la relación $x \sim y$ si x e y están alineados con O. Demuéstrese que es una relación de equivalencia. ¿Qué es el conjunto cociente?

3. La relación anterior ¿sería una relación de equivalencia sobre el conjunto A?

4. Demuéstrese que toda relación de equivalencia sobre un conjunto A define una partición sobre dicho conjunto.

5. Sea A el conjunto de los puntos del espacio y p un plano fijo. Demuéstrese que la relación $x \sim y$ si existe una recta que contenga a x e y y sea paralela al plano p, es una relación de equivalencia sobre A. ¿Qué es el conjunto cociente? (El paralelismo mencionado ha de entenderse en sentido amplio, es decir, la recta r es paralela al plano p si $r \cap p = \phi$ o si $r \subset p$.)

6. Demuéstrese que la condición necesaria y suficiente para que dos clases de equivalencia sean iguales es que un representante de clase de una sea equivalente a un representante de clase de la otra.

4

relaciones de orden

4.1. Definición.

Una relación binaria sobre un conjunto A se llama *relación de orden* sobre A y se denota por $\leq$ si verifica:

O_1. $x \leq x \ \forall \ x \in A$ (propiedad reflexiva),
O_2. $x \leq y$ e $y \leq x \Longrightarrow x = y$ (propiedad antisimétrica),
O_3. $x \leq y$ e $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ (propiedad transitiva).

Si $x \leq y$ y $x \neq y$, escribiremos $x < y$ y diremos que x *precede* a y, o que es *menor* o *más pequeño* que y; y también, que y es un *sucesor* de x, o que y es *mayor* o *más grande* que x. Si $x \leq y$ diremos que x es *no mayor* que y, o que y es *no menor* que x.

Si sobre un conjunto A hay definida una relación de orden, se dice que A es un *conjunto ordenado*.

Naturalmente, un mismo conjunto puede admitir varias ordenaciones.

EJEMPLO 1. Sobre N se pueden definir las dos siguientes ordenaciones: 1.ª $a \leq b$ si existe un número natural n tal que $b = a + n$ o si $a = b$; 2.ª $a \leq b$ si b divide a a (esto lo indicaremos de ahora en adelante por $b \mid a$). El lector comprobará sin dificultad que ambas relaciones lo son de orden sobre N.

Si dados dos elementos, a y b, de un conjunto ordenado por una relación de orden $\leq$ se puede afirmar que es cierta una de las dos relaciones $a \leq b$ o $b \leq a$, se dice que dichos elementos son *comparables*. En un conjunto ordenado pueden existir elementos que no son comparables. En el ejemplo anterior (caso 2) los números 3 y 7 no son comparables.

Si una relación de orden $\leq$ sobre un conjunto A, además verifica:

O_4. Toda pareja de elementos de A es comparable. Es decir,

$$\forall \ x, y \in A \Longrightarrow x \leq y \text{ o } y \leq x,$$

se dice que el conjunto A está *totalmente ordenado*. En caso contrario, se suele decir que la ordenación es *parcial*.

EJEMPLO 2. La relación de orden del primer caso del ejemplo anterior es total, mientras que la del segundo es parcial.

EJEMPLO 3. Si A es un conjunto cualquiera, la relación de inclusión es una relación de orden, en general parcial, sobre $\mathfrak{P}(A)$.

Si un subconjunto B de un conjunto A parcialmente ordenado, es tal que dos elementos cualesquiera de dicho subconjunto son comparables por la relación de orden parcial definida sobre A, se dice que B es una *cadena*.

EJEMPLO 4. Sea A el conjunto de los puntos del plano, y consideremos $\mathfrak{P}(A)$ ordenado parcialmente por inclusión. La familia $\{C_i\}_{i \in R_+^*}$ de círculos con centro en un punto fijo O y radio cuya longitud viene medida por un número real positivo i es una cadena.

EJERCICIOS

1. Sea Q_+^* el conjunto de los números racionales positivos. Demuéstrese que la relación $\frac{a}{b} \leq \frac{a'}{b'}$ si $ab' \leq ba'$ es una relación de orden total sobre Q_+^*.

2. Dado el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, los procedimientos 1.º y 2.º del ejemplo primero de este párrafo ¿proporcionan ordenaciones de este conjunto?

3. La relación aRb si b divide a a ¿es una relación de orden sobre el conjunto de los números enteros?

4.2. Cotas, extremos, elementos maximales y minimales.

Sea A un conjunto ordenado y $B \subset A$. Se llama *cota superior* de B a todo elemento $a \in A$ tal que $x \leq a$ para todo $x \in B$. A todo elemento $b \in A$, tal que $b \leq x$ para todo $x \in B$, se le llama *cota inferior* de B. Si existe una cota superior del subconjunto B, se dice que está *acotado superiormente;* si existe una cota inferior, que está *acotado inferiormente,* y si existen ambas cotas, simplemente que está *acotado.*

Obsérvese que puede existir más de una cota superior (inferior) de un subconjunto dado.

EJEMPLO 1. Sea N con la ordenación definida en el caso primero del ejemplo primero de [4.1] y $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Las únicas cotas inferiores de este conjunto son 1 y 2. Cotas superiores hay infinitas:

cualquier número natural mayor que 4. El subconjunto $C=\{2, 4, 6, \ldots\}$ no posee cotas superiores.

EJEMPLO 2. Sea A un conjunto cualquiera y consideremos $\mathfrak{P}(A)$ ordenado por inclusión. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de partes de A entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es una cota superior de dicha familia e $\bigcap_{i\in I} A_i$ es cota inferior de la misma.

Se llama *extremo superior* del subconjunto B a la menor de las cotas superiores (si es que existe). Desde luego, en caso de existir, es única. Si el extremo superior de un subconjunto pertenece a dicho subconjunto se dice que es *accesible*, y también se le llama el *máximo* de dicho subconjunto.

De manera análoga, con un ligero cambio de lenguaje, se definirían el *extremo inferior* y el *mínimo* de un conjunto.

EJEMPLO 3. Sea R el conjunto de los números reales con la ordenación ordinaria, y $B=\{x\in R \mid 2<x\leq 4\}$. El extremo superior de B es 4 y es accesible, luego es el máximo. El extremo inferior es 2; como no pertenece al conjunto B no es el mínimo.

EJEMPLO 4. Sea N con la ordenación $x\leq y$ si y divide a x. En esta ordenación el número 1 es el mayor de todos los elementos y no existe elemento menor que todos. El extremo superior del conjunto $\{3, 6\}$ sería el número 3; sería cota inferior todo número divisible por 3 y por 6, o lo que es lo mismo, por 6, y el extremo inferior sería el número 6.

Se llama *elemento maximal* de un conjunto ordenado A a todo elemento $m\in A$ tal que si $m\leq x$ entonces $m=x$. Obsérvese que puede existir más de un elemento maximal. Si existe un elemento mayor que todos, éste es el único elemento maximal.

EJEMPLO 5. Si en $N-\{1\}$ definimos una ordenación mediante $x\leq y$ si $y \mid x$, entonces todo número primo es un elemento maximal.

De manera análoga se definirían los *elementos minimales*.

Sea A un conjunto totalmente ordenado, si $a, b\in A$ y $a\leq b$, se llama *intervalo cerrado* de extremos a, b, al conjunto

$$[a, b]=\{x\in A \mid a\leq x\leq b\}$$

y se llama *intervalo abierto* al conjunto

$$(a, b)=\{x\in A \mid a<x<b\}.$$

El lector definirá los *intervalos semiabiertos* por la derecha y por la izquierda $[a, b)$, $(a, b]$.

EJERCICIOS

1. Sea R con su ordenación ordinaria. ¿Cuáles son los extremos superior e inferior del conjunto de los números racionales positivos?

2. Sea A el conjunto de los puntos de una recta. Consideremos $\mathfrak{P}(A)$ ordenado por inclusión. ¿Cuáles son los extremos superior e inferior de la familia $\{A_i\}_{i\in N}$ siendo $A_i=\left\{x\in A \mid -1+\frac{1}{i}<x<1-\frac{1}{i}\right\}$.

3. ¿Cuáles son los elementos maximales del ejercicio 2 de [4.1] en ambos casos? ¿Cuáles son los minimales?

4.3. Buena ordenación. Lema de Zorn.

Un conjunto ordenado se llama *bien ordenado* y a su ordenación *buena ordenación* si todo subconjunto no vacío de él posee un elemento mínimo.

EJEMPLO 1. El conjunto de los números naturales con la ordenación

$$a\leq b \quad \text{si} \quad \exists n \mid a+n=b \text{ (8)}$$

es un conjunto bien ordenado. En efecto, sea A un subconjunto no vacío cualquiera de N y sea $B=\{x\in N \mid x\leq y \ \forall\ y\in A\}$, puesto que $1\leq y \ \forall\ y\in N\Longrightarrow 1\in B$. Existe al menos un número natural que no pertenece a B, pues si $y\in A$, $y+1>y\Longrightarrow y+1\notin B$. Por tanto, existe un $n\in B$ tal que $n+1\notin B$, pues, en caso contrario, por el principio de inducción $B=N$. Este $n\leq y \ \forall\ y\in A$ pertenece a A, pues si no $n<y \ \forall\ y\in A$, de donde $n+1\leq y \ \forall\ y\in A$ y $n+1\in B$, con lo que se llega a contradicción.

EJEMPLO 2. El conjunto de los números racionales Q con su ordenación ordinaria no está bien ordenado. El subconjunto $B=\{x\in Q \mid 0<x<1\}$ no posee elemento mínimo.

La importancia de este concepto de buena ordenación reside en que a los conjuntos bien ordenados se les puede aplicar un proceso similar al principio de inducción completa, llamado *principio de inducción transfinita:* "Si B es un subconjunto de un conjunto bien ordenado A y $\forall x\in A$ tal que $\{y\in A \mid y\leq x\}\subset B$, se tiene que $x\in B$ entonces $B=A$."

---

(8) El símbolo $\exists$ se leerá "existe".

El que el principio de inducción transfinita es de más aplicación de lo que a primera vista se pudiera pensar, lo garantiza el siguiente

TEOREMA 1. *(De buena ordenación.) Todo conjunto admite una buena ordenación.*

La demostración de este teorema, que nosotros no daremos, se apoya en el llamado lema de Zorn.

LEMA DE ZORN. *Si en un conjunto ordenado* A *toda cadena está acotada superiormente, entonces* A *posee un elemento maximal.*

Se demuestra que el lema de Zorn es equivalente al llamado axioma de Zermelo.

AXIOMA DE ZERMELO. *Para toda familia* $\{A_i\}_{i \in I}$ *de subconjuntos no vacíos de un conjunto* A, *existe una función* F *definida sobre* I *tal que* $F(i) \in A_i \ \forall \ i \in I$.

EJERCICIO

Demuéstrese que todo conjunto bien ordenado está totalmente ordenado.

5

grupos

En este capítulo y en los dos siguientes vamos a estudiar conjuntos de naturaleza particular. La particularidad de estos conjuntos reside en que con sus elementos se pueden efectuar operaciones. Con esto queremos decir que, mediante reglas dadas, se pueden combinar dos elementos cualesquiera de uno de estos conjuntos para obtener un tercer elemento del mismo.

El lector conoce ya muchos conjuntos de este tipo. Los ejemplos más inmediatos los proporcionan los conjuntos de números: sobre el conjunto de los naturales están definidas las operaciones llamadas adición y multiplicación; sobre el de los enteros, las dos anteriores y la sustracción; sobre el de los racionales, los reales o los

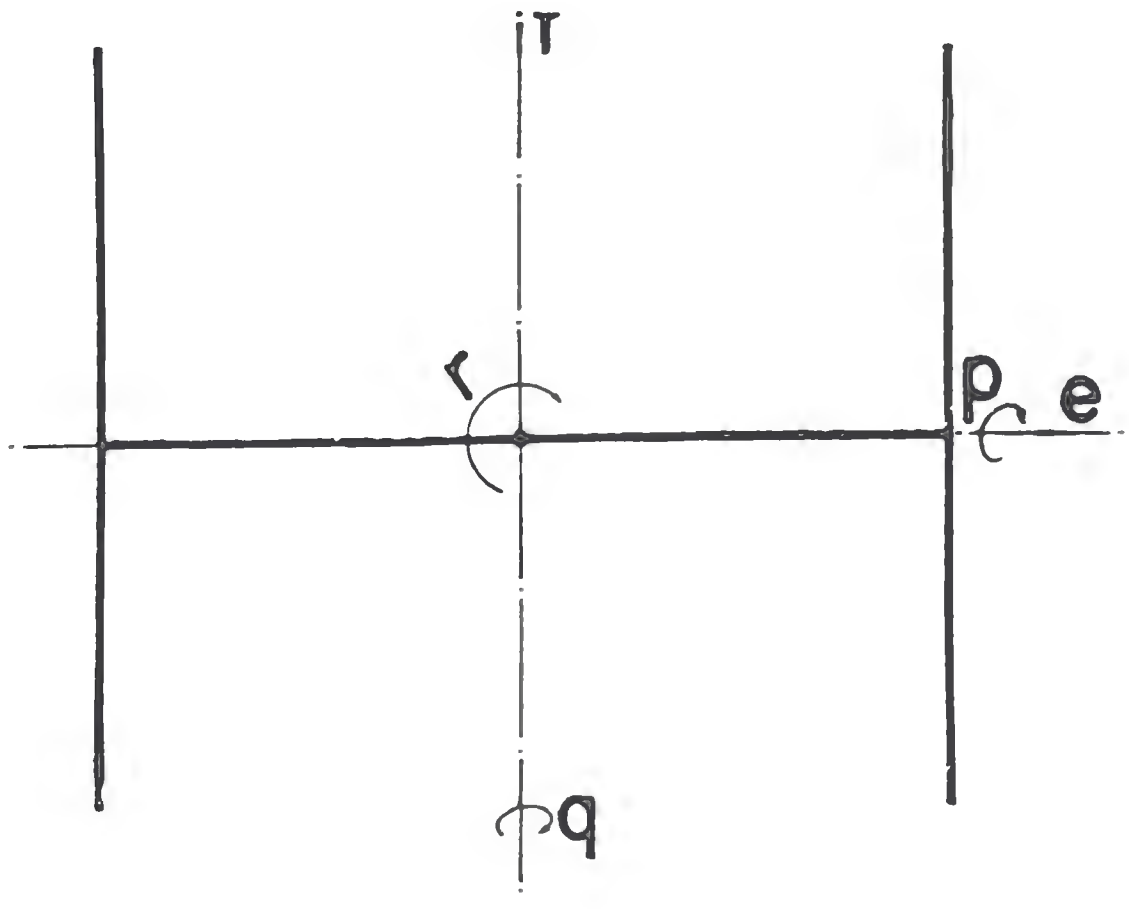


FIG. 9.

complejos, las tres operaciones citadas, y si de dichos conjuntos se exceptúa el cero, también está definida la división.

Pero no sólo son los de números los conjuntos con cuyos elementos se puede operar.

En efecto, consideremos la siguiente figura. Vamos a ver cuáles son las *isometrías* del espacio (transformaciones del espacio que dejan invariante la distancia) que hacen coincidir la figura consigo misma.

Estas son los giros de 180° alrededor de los ejes *e*, *f* y el perpendicular al plano del papel por la intersección de los anteriores. Las denotaremos, respectivamente, por *p*, *q* y *r*. Si llamamos *i* a la transformación idéntica que transforma cada punto de espacio en sí mismo, y definimos como composición de transformaciones el resultado de efectuarlas en sucesión y convenimos en que dos transformaciones son iguales cuando producen el mismo resultado, obtendremos el siguiente cuadro, llamado *tabla de multiplicar*, en el que la letra que aparece en un recuadro anterior indica la transformación obtenida al efectuar, primero, la que encabeza su misma fila, y a continuación la que encabeza su misma columna.

	i	*p*	*q*	*r*
i	*i*	*p*	*q*	*r*
p	*p*	*i*	*r*	*q*
q	*q*	*r*	*i*	*p*
r	*r*	*q*	*p*	*i*

Tenemos así definida una operación sobre el conjunto de transformaciones $\{i, p, q, r\}$.

Otro ejemplo de operación es la multiplicación de sustituciones. Una *sustitución de grado n* es una transformación de un conjunto de *n* elementos, siendo *n* un número natural. Al resultado de efectuar dos sustituciones de grado *n* una tras otra se le llama producto de la primera por la segunda y es, naturalmente, otra sustitución de grado *n*. Consideremos el conjunto {1, 2, 3}; para indicar la sustitución {(1, 2), (2, 3), (3, 1)} escribiremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

en donde los elementos de la línea superior indican originales y los inmediatamente debajo sus transformados. Si

$$a=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

se comprueba fácilmente que

$$ab=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \text{ y que } ba=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

El conjunto de todas las traslaciones del plano proporciona otro ejemplo de conjunto con una operación. El lector sabe que el producto de dos traslaciones, es decir, el resultado de efectuarlas sucesivamente, es otra traslación.

En Matemáticas, son muchos los conjuntos con una o más operaciones definidas sobre ellos que se manejan. Estas operaciones gozan, en cada caso, de determinadas propiedades. Por ejemplo, sabemos que la suma de números naturales goza de la propiedad conmutativa, es decir, si a y b son números naturales, $a+b=b+a$. Sin embargo, el producto de sustituciones no goza de esta propiedad, pues, como hemos visto más arriba, $ab \neq ba$.

En consecuencia, se impone el estudio abstracto de conjuntos en los que haya definidas operaciones que gocen de ciertas propiedades iniciales. Con ello queremos indicar que, en dicho estudio, la naturaleza de los elementos de los conjuntos que se han de estudiar es irrelevante, lo que importa es cómo están relacionados por las operaciones definidas. Estas operaciones vendrán caracterizadas por las reglas que inicialmente se suponen han de cumplir, que es lo que llamaremos axiomas definidores del sistema en estudio. Es natural que la elección de estos axiomas sea tal que los resultados obtenidos a partir de ellos, cuando se apliquen a una realización concreta del sistema algebraico, proporcionen una gran cantidad de información que de otra forma podría quedar oculta por el exceso de datos no esenciales.

5.1. Grupos, generalidades.

Se llama *operación binaria* o *ley de composición interna* sobre un conjunto A a toda aplicación F del producto cartesiano $A \times A$ en A.

Así, pues, una ley de composición interna F sobre A asocia a cada par de elementos x, y de A un tercer elemento $F(x, y)$ también de A. Las notaciones utilizadas para designar $F(x, y)$ son muy variadas. Nosotros utilizaremos las siguientes:

$$x*y, \quad x\circ y, \quad x+y, \quad x.y.$$

A las dos últimas se les llama, respectivamente, notación aditiva y notación multiplicativa y son las más empleadas. En la última es frecuente omitir el punto y escribir simplemente xy.

EJEMPLO 1. La adición de números naturales es una ley de composición interna sobre N.

EJEMPLO 2. La multiplicación también es una ley de composición interna sobre N. Como se ve, es posible que sobre un mismo conjunto existan definidas varias leyes de composición interna.

EJEMPLO 3. La sustracción *no* es una ley de composición interna sobre N, pues, por ejemplo, $3-10$ no estaría definido. Sí lo es sobre Z.

EJEMPLO 4. El producto de sustituciones es una ley de composición interna sobre el conjunto de las sustituciones de n objetos.

EJEMPLO 5. La división no es una ley de composición interna sobre R, pero sí lo es sobre $R^* = R - \{0\}$.

Sea A un conjunto sobre el que hay definida una ley de composición interna simbolizada por $*$; si existe un elemento $e \in A$ tal que $e*x = x*e = x$ para todo $x \in A$, se llama a dicho elemento e elemento *neutro*. Si dado un elemento $x \in A$ existe otro elemento $x' \in A$ tal que $x'*x = x*x' = e$, se dice que x' es un elemento *simétrico* de x.

EJEMPLO 6. La adición sobre N no posee elemento neutro y ningún elemento tiene simétrico.

EJEMPLO 7. El 1 es el elemento neutro de la multiplicación sobre N. El único elemento de N que posee simétrico respecto a esta operación es el 1 y dicho simétrico es él mismo.

EJEMPLO 8. El O es elemento neutro de la adición sobre Z y todo elemento posee simétrico: su opuesto.

EJEMPLO 9. En el producto de sustituciones la identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

hace el papel de elemento neutro y todo elemento

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

tiene simétrico, el

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Un *grupo* es un conjunto G y una ley de composición interna $F(x, y) = x*y$ sobre G, tales que verifican las propiedades siguientes:

I. $x*(y*z)=(x*y)*z$ cualesquiera que sean x, y, $z \in G$ (propiedad asociativa).
II. Existe un elemento $e \in G$ tal que $e*x=x$ para todo $x \in G$.
III. Para todo $x \in G$ existe un elemento $x' \in G$ tal que $x'*x=e$.

El elemento $x*(y*z)=(x*y)*z$ se suele escribir $x*y*z$.

TEOREMA 1. *En todo grupo si* $x'*x=e$ *se tiene que* $x*x'=e$ *y además, para cada* $x \in G$ *el elemento* x' *es único. Por tanto,* x' *es el elemento simétrico de* x. *También se verifica* $x*e=x$ *para todo* $x \in G$ *y el elemento* e *es único, luego* e *es el elemento neutro del grupo.*

Demostración. Sea $x'' \in G$ tal que $x''*x'=e$. Consideremos $x'*x*x'=(x'*x)*x'=e*x'=x'$. Si combinamos los dos miembros de esta igualdad con x'', por la izquierda, el miembro izquierdo sería $x''*(x*x*x')=(x''*x')*(x*x')=e*(x*x')=x*x'$ y el derecho $x''*x'=e$, luego $x*x'=e$.

El elemento $x*x'*x$ se puede escribir de dos formas $x*(x'*x)=x*e$ y $(x*x')*x=e*x$, luego $x*e=e*x=x$.

Si existiese otro elemento $\bar{x} \in G$ tal que $x*\bar{x}=e$ se tendría $x'=x'*e=x'*(x*\bar{x})=(x'*x)*\bar{x}=e*\bar{x}=\bar{x}$, luego para cada $x \in G$ el elemento x' es único.

Si hubiese otro elemento $\bar{e} \in G$ tal que $\bar{e}*x=x$ para todo $x \in G$, se tendría, en particular, $e=\bar{e}*e=\bar{e}$, luego e es único.

En el caso de utilizar notación aditiva, el elemento neutro se llama *cero* y se representa por 0 y el simétrico de x se denomina *opuesto* y se representa por $-x$. En notación multiplicativa, el neutro se llama *unidad* y el simétrico *inverso* y se representan por 1 y x^{-1}, respectivamente.

Obsérvese que el elemento $x*y$ no es necesariamente igual al elemento $y*x$. Por ejemplo: si $*$ simboliza la sustracción sobre Z, no es lo mismo $3*10$ que $10*3$. Si dos elementos x, y son tales que $x*y=y*x$ para una cierta ley de composición $*$, se dice que son *permutables* respecto a dicha ley.

Si todo par de elementos de un conjunto es permutable respecto a una ley de composición interna definida sobre dicho conjunto, se dice que esta ley es *conmutativa*.

Un grupo cuya ley de composición es conmutativa se llama *grupo conmutativo* o *abeliano*. Es habitual utilizar la notación aditiva para los grupos conmutativos. En lo que sigue utilizaremos o esta notación o la multiplicativa, y el lector deberá habituarse rápidamente a traducir expresiones de una a otra notación.

Por ejemplo, el elemento que se obtiene al combinar un elemento x n veces consigo mismo, en notación aditiva se escribirá nx y en notación multiplicativa x^n.

EJEMPLOS DE GRUPOS:

a) El conjunto de los números enteros con la adición.

b) El conjunto de los racionales menos el cero con la multiplicación.

c) El conjunto de las sustituciones de grado 3 con el producto de sustituciones como ley de composición. Obsérvese que no es abeliano.

d) El conjunto de las traslaciones del plano con la composición de traslaciones como operación.

e) El conjunto de las isometrías del espacio que hacen coincidir la figura H consigo misma (véase introducción).

f) El conjunto de los números reales menos el cero, $R^* = R - \{0\}$ con la multiplicación.

g) El conjunto de los números complejos respecto a la suma.

h) Si llamamos función suma $f+g$ de las funciones f y g a la función definida por $[f+g](x)=f(x)+g(x)$, el conjunto de las funciones reales de variable real continuas en el intervalo (0, 1) es un grupo con esta adición.

i) El conjunto de las funciones derivables en el intervalo (0, 1) también es un grupo respecto a la suma.

EJERCICIOS

1. En la demostración del teorema 1 se ha hecho uso de la siguiente igualdad: $x''*(x'*x*x')=(x''*x')*(x*x')$, la cual hasta el momento no estaba justificada. El teorema siguiente proporciona la necesaria justificación: "Sea $*$ una ley de composición interna asociativa sobre un conjunto G. Dos formas cualesquiera de componer los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pertenecientes a G, siempre en el mismo orden, dan por resultado el mismo elemento." Demuéstrese.

2. El conjunto Z con la sustracción no es un grupo. ¿Por qué?

3. El conjunto $\mathfrak{P}(A)$ con la operación $\cup$ ¿es un grupo?, ¿por qué? ¿Cuál es el elemento neutro?

4. El conjunto de los números naturales con la adición, ¿es un grupo?, ¿por qué?

5. Demuéstrese que el conjunto de las isometrías del espacio que dejan invariante un triángulo isósceles forman grupo con el producto de transformaciones como ley de composición. Escríbase su tabla de multiplicar.

6. Demuéstrese que en todo grupo las ecuaciones $ax=b$, $ya=b$ tiene, cada una, solución única. Y, recíprocamente, si sobre el conjunto G hay definida una ley de composición asociativa tal que cada una de las ecuaciones $ax=b$, $ya=b$ tiene solución única, dicho conjunto con la mencionada operación es un grupo.

7. Demuéstrese que en todo grupo $ax=ay$ implica $x=y$. Análogamente, $xa=ya$ implica $x=y$ (Ley de simplificación).

8. Demuéstrese que en todo grupo $(x^{-1})^{-1}=x$ y que $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$.

9. Si n es un número natural y x un elemento de un grupo G, se definen x^n, x^0 y x^{-n} de la siguiente manera:

$a)$ $x^1=x$, $b)$ $x^n=xx\overset{(n}{\ldots}x$ si $n\geq 2$
$c)$ $x^0=1$, $d)$ $x^{-n}=(x^n)^{-1}$ si $n\geq 1$

Demuéstrese que

$$x^nx^m=x^{n+m}, \qquad (x^n)^m=x^{nm}\ \forall\ n,\ m\in Z$$

y si G es abeliano, que

$$(xy)^n=x^ny^n\ \forall\ x, y\in G\ \forall\ n\in Z.$$

Enúnciense dichas propiedades en notación aditiva.

10. Demuéstrese que el conjunto de todas las sustituciones de grado n, con la ley de composición de transformaciones como ley de combinación, es un grupo. Se le llama *grupo simétrico de grado n* y se le designa por S_n.

5.2. Subgrupos, subgrupos normales.

Si sobre un conjunto A hay definida una ley de composición interna, se llama *subconjunto estable* de A respecto a dicha operación a todo $B\subset A$ tal que $xy\in B$ cualesquiera que sean $x, y\in B$.

Un subconjunto no vacío H de un grupo $(G, \cdot)$ se llama *subgrupo* de G si H con la ley de composición $\cdot$ es también un grupo.

EJEMPLO 1. El conjunto $2Z$ de los números pares es un subgrupo del de los enteros, Z, respecto a la adición. Sin embargo, el conjunto de los impares no lo es.

EJEMPLO 2. El conjunto $\{-1, 1\}$ es un subgrupo del grupo de los reales menos el cero, R^*, respecto a la multiplicación.

EJEMPLO 3. Cualquier grupo admite como subgrupo el subconjunto constituido por el elemento neutro.

EJEMPLO 4. En el grupo de las sustituciones de tres elementos el conjunto

$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right\}$$

es un subgrupo.

EJEMPLO 5. En el grupo de las isometrías de la figura H, los subconjuntos $\{e, p\}$, $\{e, q\}$ y $\{e, r\}$ son subgrupos.

EJEMPLO 6. De acuerdo con las definiciones de subgrupo y de subconjunto, todo grupo es subgrupo de sí mismo. Se le suele designar como subgrupo *impropio* y a los restantes se les llama *propios*.

TEOREMA 2. *La condición necesaria y suficiente para que* $H \subset G$ *sea un subgrupo del grupo* G *es que si* $a, b \in H$ *entonces* $ab^{-1} \in H$.

Condición necesaria: Si H es un subgrupo de G y $a, b \in H \Longrightarrow$ $\Longrightarrow b^{-1} \in H$ y $ab^{-1} \in H$.

Condición suficiente: Si $H \subset G$ y $ab^{-1} \in G \ \forall \ a, b \in H \Longrightarrow$ $\Longrightarrow 1 = aa^{-1} \in H$ y $a^{-1} = 1a^{-1} \in H \ \forall \ a \in H$

No es necesario demostrar que la propiedad asociativa se verifica en H, ya que esto es consecuencia de verificarse en G.

Es fácil comprobar que la intersección de una familia cualquiera de subgrupos de un grupo dado es también un subgrupo.

Si G es un grupo y B es un subconjunto cualquiera de G, existe un subgrupo mínimo de G que contiene a B, es decir, un subgrupo que contiene a B y tal que cualquier otro subgrupo que esté contenido propiamente en él no contiene a B. Evidentemente, dicho subgrupo mínimo es la intersección de la familia de todos los subgrupos que contienen a B. Obsérvese que esta familia no es vacía, pues G pertenece a ella. Al subgrupo mínimo que contiene al subconjunto B se le llama *subgrupo engendrado por* B y se denota por (B).

EJEMPLO 7. Si x es un elemento del grupo G, el subgrupo engendrado por $\{x\}$ es el conjunto de todas las potencias de exponente entero de x. En efecto, dichas potencias han de pertenecer a $(\{x\})$, pero estas potencias constituyen ya un subgrupo en virtud de la propiedad primera y definición *d)* del Ej. 9 de [5.1]. Al subgrupo engendrado por x se le llama *subgrupo cíclico engendrado por* x y se denota corrientemente por (x).

EJEMPLO 8. El subgrupo engendrado por el subconjunto $\{p, q\}$ del grupo de las isometrías que dejan invariante la figura H es todo el grupo.

La unión conjuntista de subgrupos de un grupo dado no es necesariamente un subgrupo. Por ejemplo, la unión de los subgrupos

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

y $$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

del grupo simétrico S_3 sería

$$H_1 \cup H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

que no es un subgrupo, pues no contiene el producto

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea H un subgrupo de G, se denomina *clase por la izquierda de H en G* al conjunto

$$gH = \{x \in G \mid x = gh \ \forall \ h \in H\}$$

Antes de pasar a dar ejemplos convendrá dar una nueva notación para escribir sustituciones. Si tenemos un conjunto de n objetos $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ el símbolo $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r})(\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_s}) \ldots (\alpha_{l_1}, \alpha_{l_2}, \ldots, \alpha_{l_t})$ representa una sustitución de acuerdo con el siguiente convenio: el transformado mediante la sustitución de cada elemento que no aparece como último dentro de un paréntesis, es el que le sigue, y el del último, el primero en el mismo paréntesis. Los elementos que se transforman en sí mismos no se escriben. La sustitución que transforma cada elemento en sí mismo se representa por (1). Así, la sustitución

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

se escribiría (1 4 6)(2 5) y la

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

se pondría (1 3 2 4 6).

A las sustituciones que transforman cada elemento en el siguiente y el último en el primero se les llama *ciclos*. Luego la nueva representación de las sustituciones es en producto de ciclos. A un ciclo de dos elementos se le denomina *transposición*.

Con la nueva notación los elementos del grupo S_3 serán

$$\{(1), (1\ 2), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

Las clases por la izquierda del subgrupo $H = \{(1), (1\ 2)\}$ serán

$$(1)H = \{(1), (1\ 2)\}$$
$$(2\ 3)H = \{(2\ 3), (1\ 2\ 3)\}$$
$$(1\ 3)H = \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

y a las clases por la derecha

$$H(1)=\{(1),\ (1\ 2)\}$$
$$H(2\ 3)=\{(2\ 3),\ (1\ 3\ 2)\}$$
$$H(1\ 3)=\{(1\ 3),\ (1\ 2\ 3)\}$$

LEMA 1. *Si* H *es un subgrupo, la condición necesaria y suficiente para que las clases por la izquierda* xH *e* yH *sean la misma clase es que* $x^{-1}y \in H$. *Análogamente,* Hx=Hy *si y solo si* $xy^{-1} \in H$.

Demostración: Si $xH=yH \Longrightarrow y \in xH \Longrightarrow y=xh$ para algún $h \in H$, luego $x^{-1}y=h \in H$. Recíprocamente, si $x^{-1}y \in H \Longrightarrow x^{-1}y= =h \in H \Longrightarrow y=xh$; si $z \in yH \Longrightarrow z=yh'$ con $h' \in H$, $z=(xh)h'= =x(hh')=x\bar{h}$ con $\bar{h}=hh' \in H$ por ser H subgrupo, luego $z \in xH$ y, por tanto, $yH \in xH$. De manera análoga se demostraría que $xH \subset yH$ y de ambas inclusiones se tendría $xH=yH$.

Sea H un subgrupo de G; dos elementos x, $y \in G$ se dicen *congruentes módulo* H y se escribe $x \equiv y(H)$ si $x^{-1}y \in H$.

TEOREMA 3. *La relación de congruencia* $x \equiv y(H)$ *es una relación de equivalencia.*

Demostración: $x^{-1}x=1 \in H$ por ser éste un subgrupo, luego $x \equiv x(H)$ y se cumple E_1; si $x \equiv y(H) \Longrightarrow x^{-1}y=h \in H$, pero entonces $h^{-1}=(x^{-1}y)^{-1}=y^{-1}x \in H$, luego $y \equiv x(H)$ y se cumple E_2 y, por último, si $x \equiv y(H)$ e $y \equiv z(H) \Longrightarrow x^{-1}y=h \in H$ e $y^{-1}z=h' \in H$, de donde $(x^{-1}y)\,(y^{-1}z)=x^{-1}(yy^{-1})z=x^{-1}z=hh' \in H$ nuevamente por ser H subgrupo, luego se verifica E_3.

Teniendo en cuenta el teorema 3 y el lema 1 anteriores, así como el Ej. 4 de [3.2], resulta que el conjunto de las clases por la izquierda de H en G, constituye una partición de G. Lo mismo se podría razonar para las clases por la derecha.

Si consideramos el grupo de los números enteros con la adición Z y el subgrupo $2Z$, las dos clases de $2Z$ en Z por la izquierda son: el conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares. Y estas mismas son las clases por la derecha de $2Z$ en Z. Sin embargo, hemos visto más arriba que las clases por la izquierda del subgrupo $H=\{(1),\ (1\ 2)\}$ en S_3 son distintas a las del mismo subgrupo por la derecha. Esto, junto con los resultados que se obtendrán a partir de ella, justifican la siguiente definición:

Se dice que un subgrupo H de un grupo G es un *subgrupo normal* si toda clase por la izquierda es una clase por la derecha, es decir, si

$$xH=Hx \quad \forall \ x \in G$$

o, lo que es lo mismo, si para todo $x \in G$ y para todo $h \in H$ se pueden hallar elementos h' y h'' tales que

$$xh = h'x, \qquad hx = xh''.$$

Dos elementos x, y de un grupo G se llaman *conjugados* si existe un elemento $g \in G$ tal que $y = gxg^{-1}$.

Puesto que de $xh = h'x$ se deduce $xhx^{-1} = h'$, siendo x y h elementos arbitrarios de G y H, respectivamente, tenemos que:

Si un subgrupo H *es normal, contiene a todos los conjugados de sus elementos.*

Es decir, si con xHx^{-1} denotamos el conjunto $\{g \in G \mid g = xhx^{-1} \ \forall \ h \in H\}$, la anterior afirmación equivale a decir que si H es un subgrupo normal, se verifica

$$xHx^{-1} \subset H \ \forall \ x \in G$$

y, como además, si $xhx^{-1} = h' \Longrightarrow h = (x^{-1})h'(x^{-1})^{-1}$, resulta que si H es normal $H \subset x^{-1}H(x^{-1})^{-1} \ \forall \ x^{-1} \in G$ y de ambas relaciones de inclusión, y puesto que G es un grupo, tenemos en definitiva

$$xHx^{-1} = H \ \forall \ x \in G.$$

EJEMPLO 9. El subgrupo $H' = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ de S_3 es normal. Compruébese.

Evidentemente, si un grupo es abeliano todos sus subgrupos son normales.

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que todos los subgrupos de $(Z, +)$ son de la forma $nZ = \{x \in Z \mid x = \dot{n}\}$, siendo n un número natural.

2. Hállense los subgrupos del grupo de las isometrías del triángulo isósceles.

3. Se llama grupo cíclico al engendrado por un solo elemento, es decir, si $G = (a)$ para algún elemento $a \in G$. Demuéstrese que $(Z, +)$ es un grupo cíclico.

4. Demuéstrese que todo grupo cíclico es abeliano y que todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico.

5. Demuéstrese que la intersección de dos subgrupos normales es un subgrupo normal.

6. Si H es un subgrupo de G, demuéstrese que los conjuntos de clases de H en G por la izquierda y por la derecha son equipotentes.

7. Si H es un subgrupo de G, demuéstrese que dos clases cualesquiera (por la izquierda o por la derecha) de H en G son equipotentes.

5.3. Grupo cociente. Homomorfismo. Isomorfismo. Teorema de isomorfía.

Si sobre un conjunto A hay definidas una relación de equivalencia $\sim$ y una ley de composición interna se dice que la relación de equivalencia es compatible con la ley de composición si

$$\left.\begin{array}{c} a \sim a' \\ \text{y} \\ b \sim b' \end{array}\right\} \Longrightarrow a*b \sim a'*b'.$$

EJEMPLO 1. La relación de equivalencia sobre Z, dada por $x \sim y$ si $x-y=\dot{n}$ siendo n un número natural, es compatible con la adición y con la multiplicación.

TEOREMA 4. *Si* H *es un subgrupo normal de* G, *la relación de equivalencia* $x \equiv y(H)$ *es compatible con la ley de grupo.*

En efecto, si $x \equiv x'(H)$ e $y \equiv y'(H) \Longrightarrow x^{-1}x' = h_1 \in H$ e $y^{-1}y' = h_2 \in H$, luego $(xy)^{-1}(x'y') = (y^{-1}x^{-1})(x'y') = y^{-1}(x^{-1}x')y' = y^{-1}h_1y' = y^{-1}h_1(yh_2)$, pero por ser H normal, $yh_2 = h_3y$ con $h_3 \in H$ y, por tanto, $(xy)^{-1}(x'y') = y^{-1}h_1h_3y = y^{-1}hy = y^{-1}yh' = h'$, donde hemos puesto $h_1h_3 = h \in H$ y $hy = yh'$ utilizando nuevamente el hecho de ser H normal. En definitiva $(xy)^{-1}(x'y') \in H$, es decir, $xy \equiv x'y'(H)$ c.q.d.

Sea H un subgrupo normal de un grupo G; consideremos el conjunto cociente de G respecto a la relación de equivalencia $x \equiv y(H)$, al que denotaremos por G/H. Los elementos de este conjunto son, evidentemente, las clases por la izquierda (o por la derecha, puesto que H es normal) de H en G. Vamos a ver que este conjunto con la operación

$$(xH)(yH) = xyH$$

es un grupo.

Obsérvese que el producto de clases está definido utilizando representantes de clase. Cabe, pues, la duda de si al utilizar nuevos representantes de las mismas clases, se obtendría la misma clase producto. Tenemos, por tanto, que demostrar, en primer lugar, que si $x' \in xH$ e $y' \in yH$, se tiene $xyH = x'y'H$ si queremos que la definición de producto dada sea coherente. Ahora bien, la condición anterior es equivalente a esta otra: $x \equiv x'(H)$ e $y \equiv y'(H) \Longrightarrow xy \equiv x'y'(H)$, pero esto es precisamente el teorema 4 demostrado más arriba. La propiedad anterior se llama *propiedad uniforme*. Veamos ahora que se verifica la propiedad asociativa: $(xH)[(yH)(zH)] = (xH)(yzH) =$

$=(x[yz]H)=([xy]zH)=(xyH)\,(zH)=[(xH)\,(yH)]\,(zH)$. En esta cadena de igualdades se ha utilizado solamente la definición de producto de clases y la propiedad asociativa de la operación en G.

El elemento neutro de G/H es, evidentemente la clase $1H=H$. En efecto: $(1H)\,(xH)=1xH=xH$.

La clase inversa de la clase xH es la clase $x^{-1}H$, pues $(xH)\,(x^{-1}H)=$ $=xx^{-1}H=1H$.

Al conjunto G/H con la operación definida más arriba se le llama *grupo cociente de G respecto a H*.

NOTA. No debe olvidarse que el grupo G/H está definido únicamente si el subgrupo H es normal.

EJEMPLO 2. El grupo cociente $Z/2Z$ tiene como elementos la clase de los números pares y la clase de los impares, las cuales podemos simbolizar por *par* e *impar*. La tabla de sumar para este grupo cociente sería:

+	par	impar
par	par	impar
impar	impar	par

EJEMPLO 3. Las clases del subgrupo $H'=\{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ en S_3 serían: $(1)H$ y $(1\ 2)H$. La tabla de multiplicar del grupo cociente S_3/H sería:

·	$(1)H$	$(1\ 2)H$
$(1)H$	$(1)H$	$(1\ 2)H$
$(1\ 2)H$	$(1\ 2)H$	$(1)H$

Sean $(G, *)$ y $(G', \circ)$ dos grupos, se llama *homomorfismo entre G y G'* a toda aplicación $F: G \longrightarrow G'$ tal que

$$F(x*y)=F(x)\circ F(y)$$

cualesquiera que sean $x, y \in G$.

Si la aplicación F es sobreyectiva se dice *homomorfismo sobre*, en caso contrario se dice *homomorfismo en*. Si la aplicación F es biyectiva se dice *isomorfismo* en lugar de homomorfismo y, en este caso, se dice que G y G' son *isomorfos*. Cuando $G'=G$ se emplea la palabra *endomorfismo* en lugar de homomorfismo y *automorfismo* en lugar de isomorfismo.

EJEMPLO 4. La aplicación $F: C \longrightarrow R$, donde C es el conjunto

de los números complejos, dada por $F(z)=Re(z)$, es un homomorfismo de C sobre R.

EJEMPLO 5. La aplicación $F(x)=\log x$ es un isomorfismo del grupo multiplicativo de los números reales positivos $(R_+^*, \cdot)$ sobre el grupo aditivo de los números reales $(R, +)$, pues si $x, y \in R_+^*$ se tiene $\log(xy)=\log x+\log y$ y dicha aplicación es biyectiva.

EJEMPLO 6. Sean C_+ el conjunto de las funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$ y D_+ el conjunto de las funciones derivables con derivada continua. Entonces

$$\begin{aligned} F: D_+ &\longrightarrow C_+ \\ f &\longrightarrow f' \end{aligned}$$

es un homomorfismo.

EJEMPLO 7. Sea $G=(-1, 1, \cdot)$, la aplicación

$$F: (Z, +) \longrightarrow G$$

dada por $F(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x = \dot{2} \\ -1 \text{ si } x \neq \dot{2} \end{cases}$

es un homomorfismo sobre.

EJEMPLO 8. Sea $(G, +)$ un grupo. La aplicación

$$F: G \longrightarrow G$$

definida por $F(x)=0 \ \forall \ x \in G$ es un endomorfismo.

EJEMPLO 9. La aplicación del grupo aditivo de los números complejos en sí mismo dada por $z=x+iy \longrightarrow \bar{z}=x-iy$ es un automorfismo.

TEOREMA 5. *Si* F: G $\longrightarrow$ G′ *es un homomorfismo entre grupos se verifica:*

1.° $F(1)=1'$;
2.° $F(x^{-1})=F(x)^{-1}$;
3.° $F^{-1}(1')=\{x \in G \mid F(x)=1'\}$ *es un subgrupo normal de G, al que se llama núcleo de F;*
4.° *F(G) es un subgrupo de G′, y*
5.° *Si G es conmutativo también lo es F(G).*

Demostración:

1.° $F(1)F(x)=F(1x)=F(x) \Longrightarrow F(1)=1'$,
2.° $F(x^{-1})F(x)=F(x^{-1}x)=F(1)=1' \Longrightarrow F(x^{-1})=F(x)^{-1}$,

3.° Si $a,\ b \in F^{-1}(1') \Longrightarrow F(a)=F(b)=1' \Longrightarrow F(b^{-1})=F(b)^{-1}=1'$, luego $F(ab^{-1})=F(a)F(b^{-1})=1'$ de donde $ab^{-1} \in F^{-1}(1')$.
Si $m \in F^{-1}(1')$ se tiene $F(xmx^{-1})=F(x)F(m)F(x^{-1})=$
$=F(x)F(x)^{-1}=1' \Longrightarrow xmx^{-1} \in F^{-1}(1')\ \forall\ x \in G$.
La demostración de 4.° y 5.° se deja a cargo del lector.

TEOREMA 6. (Primer teorema de isomorfía.) *Si* F: G $\longrightarrow$ G′ *es un homomorfismo entre grupos y* N=F^{-1}(1′) *es su núcleo, la aplicación* φ: G/N $\longrightarrow$ F(G) *dada por* φ(xN)=F(x) *es un isomorfismo.*

Veamos, en primer lugar, que φ es efectivamente una aplicación. Si $x' \in xN \Longrightarrow x'=xm$ con $m \in N$, es decir, $F(m)=1'$, luego $\varphi(x'N)=$ $=F(x')=F(xm)=F(x)F(m)=F(x)=\varphi(xN)$. Es biunívoca, pues si $\varphi(xN)=\varphi(yN) \Longrightarrow F(x)=F(y) \Longrightarrow 1'=F(x)^{-1}F(y)=F(x^{-1})F(y)=F(x^{-1}y)$ $\Longrightarrow x^{-1}y \in N \Longrightarrow xN=yN$. Respeta las operaciones:

$$\varphi[(xN)\,(yN)]=\varphi(xyN)=F(xy)=F(x)F(y)=\varphi(xN)\varphi(yN).$$

Es, por tanto, un isomorfismo.

EJERCICIOS

1. La aplicación F: $(Z, +) \longrightarrow (Z, +)$ dada por $F(x)=2x$ ¿es un endomorfismo?, ¿es un automorfismo?

2. La aplicación F: $(Q^*, \cdot) \longrightarrow (Q^*, \cdot)$ dada por $F(x)=2x$, ¿es un endomorfismo?

3. Demuéstrese que la condición necesaria y suficiente para que un homomorfismo sobre sea un isomorfismo es que su núcleo sea cero.

4. Demuéstrese que el grupo de las isometrías del triángulo equilátero y el grupo simétrico de grado tres son isomorfos.

5. Demuéstrese que el isomorfismo es una relación de equivalencia.

6. ¿Cuál es el núcleo del homomorfismo F: $D_\perp \longrightarrow C_\perp$ del ejemplo 3?

5.4. Grupos finitos.

Un grupo $(G, *)$ se llama *finito* si el conjunto G es finito. En este caso al número de elementos de G se le llama *orden* del grupo. Lo denotaremos por $O(G)$. Los grupos de los ejemplos *c*) y *e*) de [5.1] son finitos.

En virtud del resultado del Ej. 7 de [5.2], si H es un subgrupo de un grupo finito G, dos clases cualesquiera de H en G tienen el mismo número de elementos. Naturalmente, el número de clases en este caso es finito. A este número se le llama *indice* de H en G.

Así, pues, teniendo en cuenta que las clases de H en G constituyen una partición de G, queda demostrado el

TEOREMA 7 (de Lagrange). *Si* H *es un subgrupo de un grupo finito* G, *entonces el orden de* H *es un divisor del orden de* G. *Más concretamente,*

$$O(G)=O(H)\cdot i_H(G)$$

donde $i_H(G)$ *representa el índice de* H *en* G.

Si x es un elemento cualquiera de un grupo (finito o infinito), se llama *orden de* x al menor número natural tal que $x^n=1$ y $x^m \neq 1 \ \forall \ m<n$ (m y n naturales). Si $x^n \neq 1 \ \forall \ n \in N$, se dice que el orden de x es infinito.

LEMA 2. *Si* $x \in G$ *y* $x^n=x^m$ *con* $n, m \in N$, $m>n$, *entonces* x *es de orden finito.*

En efecto, de $x^n=x^m \Longrightarrow 1=x^{m-n}$ con $m-n \in N$, luego $O(x) \leq m-n$.

Si el orden de un elemento x es finito e igual a n, el orden del grupo cíclico engendrado por x es también n, luego

COROLARIO 1. *El orden de un elemento de un grupo finito es un divisor del orden del grupo.*

COROLARIO 2. *Si* G *es un grupo finito de orden* n *y* $x \in G$ *se tiene que* $x^n=1$.

EJEMPLO 1. El grupo de las isometrías de la figura H es de orden 4. Los tres elementos p, q, r son de orden 2.

EJEMPLO 2. El orden de S_3 es $3!=6$. Los elementos (1 2), (1 3) y (2 3) son de orden 2 y los (1 2 3) y (1 3 2) son de orden 3.

EJERCICIOS

1. Escríbanse las tablas de multiplicar de los grupos de orden n, donde $2 \leq n \leq 6$.

2. Sea G un conjunto finito sobre el que hay definida una ley de composición interna asociativa y que cumple las dos leyes de simplificación ($ax=ay \Longrightarrow x=y$, $xa=ya \Longrightarrow x=y$). Demuéstrese que G, con esta ley de composición, es un grupo.

3. Demuéstrese que todo grupo cíclico infinito es isomorfo al grupo aditivo de los números enteros y que dos grupos cíclicos finitos del mismo orden son isomorfos.

4. Hállense todos los subgrupos de un grupo cíclico de orden n.

5. Demuéstrese que todo grupo de orden p, siendo p un número primo, es cíclico.

6

anillos y cuerpos

Hemos visto en el capítulo anterior, que el conjunto de los números enteros con la adición es un grupo abeliano. Sin embargo, el mismo conjunto respecto a la multiplicación no cumple los axiomas de grupo. Por otra parte, los conjuntos de los números racionales o de los números reales, además de ser grupos respecto a la adición, lo son respecto a la multiplicación, siempre que se omita de ellos el cero.

Las estructuras algebraicas que se van a estudiar en este capítulo son generalizaciones de esos conjuntos de números con las citadas operaciones. Lo que va a distinguir estas estructuras de la estructura de grupo, es que están constituidas por un conjunto y dos operaciones, por lo que, aparte de las propiedades típicas de estas operaciones, será importante saber cómo están relacionadas.

6.1. Anillos. Dominios de integridad. Cuerpos.

Un *anillo* es un conjunto A y dos leyes de composición interna (que denotaremos por símbolos $+$ y $\cdot$) definidas sobre él, tales que:

I. A es un grupo conmutativo respecto a la operación $+$.
II. La operación $\cdot$ es asociativa.
III. Ambas operaciones están relacionadas por las denominadas propiedades distributivas:

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z, \qquad (y+z)\cdot x=y\cdot x+z\cdot x.$$

NOTA. En lo que sigue omitiremos el $\cdot$, símbolo de la segunda operación. A las operaciones les llamaremos, naturalmente, adición y multiplicación.

LEMA 1. *En todo anillo* A *se verifica:*

1.° $x0=0x=0$,
2.° $(-x)y=x(-y)=-(xy)$,
3.° $(-x)(-y)=xy$.

Demostración:

1.° De $xy = x(0+y) = x0 + xy \Longrightarrow x = 0$, y de
$yx = (0+y)x = 0x + yx \Longrightarrow 0x = 0$;

2.° De $0 = 0y = [x + (-x)]y = xy + (-x)y \Longrightarrow (-x)y = -(xy)$, y de
$0 = x0 = x[y + (-y)] = xy + x(-y) \Longrightarrow x(-y) = -(xy)$,

3.° Y aplicando el resultado anterior:

$$(-x)(-y) = -[x(-y)] = -[-(xy)] = xy.$$

Se suele escribir $-xy$ en lugar de $-(xy)$ y $x-y$ por $x+(-y)$.

Las dos últimas relaciones son, ni más ni menos, que las llamadas reglas de los signos, pero hay que tener cuidado al enunciarlas porque ahora $-x$ no es necesariamente un número negativo.

EJEMPLO 1. Los conjuntos Z, Q, R y C con las operaciones habituales de adición y multiplicación son, como ya se mencionó, anillos. Todos ellos poseen elemento neutro para la multiplicación. Pero entre el anillo Z y los restantes existen algunas diferencias. En el anillo Z no puede afirmarse que todo elemento tenga inverso (de hecho sólo el 1 y el -1 lo poseen). En los restantes casos todos lo elementos, salvo el 0, poseen elemento inverso. Obsérvese que, como consecuencia de la propiedad 1.ª del Lema 1, un anillo no puede ser grupo respecto a las dos operaciones.

Si un anillo A es tal que posee elemento neutro respecto a la multiplicación (unidad) se le llama *anillo con elemento unidad.*

EJEMPLO 2. El conjunto $2Z$ de todos los números pares es, con la adición y la multiplicación, un anillo sin elemento unidad.

Se dice que un anillo A es *conmutativo* si la multiplicación es conmutativa. Todos los anillos de los ejemplos anteriores son conmutativos.

EJEMPLO 3. Sea G un grupo conmutativo, si en el conjunto de todos los endomorfismos de G, End(G), definimos las dos operaciones:

1. $$[\sigma + \tau](x) = \sigma(x) + \tau(x)$$
2. $$\sigma \circ \tau(x) = \sigma[\tau(x)]$$

para todo $\sigma, \tau \in \text{End}(G)$ y $\forall\, x \in G$, el conjunto End(G) con estas dos operaciones es un anillo, en general, no conmutativo. La demostración de que es un anillo queda a cargo del lector, recordándole que una de las primeras cosas que debe demostrar es que las aplicaciones $+$ y $\circ$ son homomorfismos. Para ver que este anillo

no es conmmutativo en general, daremos un contraejemplo: Sea $G=\{i, p, q, r\}$ el grupo de las isometrías que dejan invariante la figura H, y σ y τ los endomorfismos dados por

$$\begin{array}{ll} i \xrightarrow{\sigma} i & i \xrightarrow{\tau} i \\ p \longrightarrow i & p \longrightarrow r \\ q \longrightarrow r & q \longrightarrow i \\ r \longrightarrow r & r \longrightarrow r \end{array}$$

Se ve fácilmente que

$$\begin{array}{ll} i \xrightarrow{\sigma\circ\tau} i & i \xrightarrow{\tau\circ\sigma} i \\ p \longrightarrow r & p \longrightarrow i \\ q \longrightarrow i & q \longrightarrow r \\ r \longrightarrow r & r \longrightarrow r \end{array}$$

Evidentemente:

$$\sigma \neq \tau.$$

En los anillos de números citados anteriormente, se verifica que $xy=0 \Longrightarrow x=0$ o $y=0$. Cuando el anillo es conmutativo y es cierta esta relación, se dice que es un *dominio de integridad*. Luego Z, Q, R, C son dominios de integridad.

Existen anillos que no son dominios de integridad.

EJEMPLO 4. Sea el conjunto constituído por los símbolos $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, ..., $\overline{n-1}$; en este conjunto definiremos las dos siguientes operaciones:

1. $\bar{x}+\bar{y}=$resto de la división de $x+y$ por n.
2. $\bar{x}\bar{y}=$resto de la división de xy por n.

Se comprueba fácilmente que este conjunto con estas operaciones es un anillo. Las tablas de sumar y multiplicar para el caso $n=6$, serían:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

·	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Obsérvese que: $\bar{3}\cdot\bar{2}=\bar{0}$ y, sin embargo, $\bar{3}\neq\bar{0}$ y $\bar{2}\neq\bar{0}$, luego este anillo no es un dominio de integridad.

Si un elemento $x \neq 0$ de un anillo A es tal que existe un elemento $y \neq 0$ que verifica $xy=0$ o $yx=0$, se dice que x es un *divisor de* 0. En el anillo anterior los divisores de cero son el $\bar{2}$, $\bar{3}$ y $\bar{4}$.

Si un elemento x de un anillo unitario A es tal que posee inverso, se le llama *inversible*. En el ejemplo anterior el $\bar{1}$ y el $\bar{5}$ son los únicos elementos inversibles. Sin embargo:

EJEMPLO 5. Si tomamos ahora el caso $n=5$, la tabla de multiplicar sería:

·	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Como se ve fácilmente, todo elemento distinto de $\bar{0}$ es inversible.

Se llama *cuerpo* a todo anillo A tal que el conjunto A^* de sus elementos distintos de 0 es un grupo respecto a la multiplicación. Por tanto, todos los elementos distintos de 0 de un cuerpo son inversibles. Al conjunto A^* provisto de la multiplicación se le llama *grupo multiplicativo* del cuerpo A. Los anillos Q, R y C son cuerpos, así como el anillo del último ejemplo.

Como consecuencia del Ej. 6 de [5.1], en todo cuerpo las ecuaciones $ax=b$ e $ya=b$ tienen solución única si $a \neq 0$; todo elemento del cuerpo es solución de dichas ecuaciones si $a=b=0$ y carecen de solución si $a=0$ y $b \neq 0$.

LEMA 2. *Todo elemento inversible de un anillo no es un divisor de cero.*

Demostración: Si el elemento $x \in A$ es inversible $\exists\, a^{-1}$ y $a \neq 0$. Si $ab=0$ o $ca=0 \Longrightarrow a^{-1}(ab)=b=0$ o $(ca)a^{-1}=c=0$, luego a no es un divisor de cero.

TEOREMA 1. *En todo dominio de integridad se verifican las propiedades de simplificación*

$$ax=ay \Longrightarrow x=y, \qquad xa=ya \Longrightarrow x=y \;\; \forall \;\; a \neq 0.$$

Demostración: $ax=ay \Longrightarrow ax-ay=0 \Longrightarrow a(x-y)=0$ y, como A es dominio de integridad y $a \neq 0$, ha de ser $x-y=0 \Longrightarrow x=y$. La otra propiedad se demostraría de manera análoga.

El teorema no es cierto si A no es un dominio de integridad.

En efecto, en el ejemplo 4 se tiene $\bar{2}\cdot\bar{2}=\bar{2}\cdot\bar{5}$ (véase la tabla de multiplicar) y $\bar{2}\neq\bar{5}$.

EJERCICIOS

1. Póngase un ejemplo de anillo no unitario A en el que, para algún elemento $x\in A$ existe otro $y\in A$ tal que $yx=x$ o $xy=x$.

2. Pruébese que la condición necesaria y suficiente para que un anillo A sea conmutativo es que $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, cualesquiera que sean $x, y\in A$.

3. Sea $A=R\times R$. Sobre este conjunto se definen las operaciones:

$a)$ $(x_1, x_2)+(y_1, y_2)=(x_1+y_1, x_2+y_2)$
$b)$ $(x_1, x_2)(y_1, y_2)=(x_1y_1-x_2y_2, x_1y_2+x_2y_1)$.

Demuéstrese que A, con estas operaciones, es un anillo. ¿Es conmutativo? ¿Es unitario? ¿Tiene divisores de cero? ¿Es un cuerpo?

4. Demuéstrese que todo dominio de integridad finito es un cuerpo.

5. Hállense dos divisores de cero del anillo del ejemplo 3.

6.2. Subanillos. Ideales. Homomorfismo.

Se llama *subanillo* de un anillo A a todo subconjunto no vacío de A tal que provisto de la adición y multiplicación inducidas por las de A es a su vez un anillo. Evidentemente, un subconjunto no vacío del anillo A es un subanillo de A si es un subgrupo aditivo de A y es estable respecto a la multiplicación. Es decir, se tiene que verificar:

1. Si $x, y\in B\Longrightarrow x-y\in B$.
2. Si $x, y\in B\Longrightarrow xy\in B$.

EJEMPLO 1. El conjunto $2Z$ es un subanillo del anillo Z, con la adición y multiplicación habituales. Obsérvese que un subanillo de un anillo unitario pudiera no ser unitario.

EJEMPLO 2. Siempre con la adición y multiplicación habituales, Z es un subanillo de Q, éste lo es de R y a su vez éste lo es de C.

La intersección de una familia de subanillos de un anillo dado es también un subanillo. Se comprueba fácilmente.

Dado un subconjunto B de un anillo A, se llama *subanillo engendrado por* B, al menor de los subanillos de A que contienen a B. Es, evidentemente, la intersección de todos los subanillos de A que contienen a B.

Se llama *ideal* I de un anillo A a todo subgrupo aditivo de A

tal que $ax \in I$ y $xa \in I$ para todo $x \in I$ y todo $a \in A$. Es decir, para que $I \subset A$ sea un ideal se tiene que verificar:

1. Si $x, y \in I \Longrightarrow x - y \in I$.
2. Si $x \in I$, $a \in A \Longrightarrow \begin{cases} ax \in I \\ xa \in I. \end{cases}$

Evidentemente, todo ideal de un anillo A es un subanillo de A; la recíproca no es necesariamente cierta.

EJEMPLO 3. Todo ideal del anillo de los enteros Z, es de la forma $nZ = \{x \in Z \mid x = \overset{\curvearrowright}{n}\}$, donde n es un número natural. Que estos subconjuntos son subgrupos de Z ya se vio en el Ej. 1 de [5.2]. Basta comprobar que si $x \in nZ$ y $a \in Z \Longrightarrow xa$, $ax \in nZ$. Pero si $x \in nZ \Longrightarrow x = kn \Longrightarrow ax = akn$, luego $ax \in nZ$.

EJEMPLO 4. Hemos dicho que Z es un subanillo de Q, sin embargo, no es un ideal. En efecto, $2 \in Z$, $\frac{1}{3} \in Q$ y $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \notin Z$.

EJEMPLO 5. En todo anillo A, $\{0\}$ y A son ideales de A.

Dados dos anillos A y A' se llama *homomorfismo* entre A y A' a toda aplicación $F\colon A \longrightarrow A'$ tal que,

1. $F(x+y) = F(x) + F(y)$.
2. $F(xy) = F(x)F(y)$,

cualesqueria que sean $x, y \in A$.

Obsérvese que en los primeros miembros las operaciones se efectúan en A y en los segundos en A'.

Si la aplicación F es sobreyectiva, se dice homomorfismo de A *sobre* A'. Si F es biyectiva, se dice *isomorfismo* en lugar de homomorfismo. Si $A' = A$, se emplea la palabra *endomorfismo* en lugar de la de homomorfismo y *automorfismo* por isomorfismo.

EJEMPLO 6. Sea A el anillo compuesto por el conjunto $\{0, 1\}$ y la adición y multiplicación dadas por las tablas

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1.

La aplicación $F\colon Z \longrightarrow A$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = \dot{2} \\ 1 \text{ si } x \neq \dot{2} \end{cases}$$

es un homomorfismo de Z sobre A.

EJEMPLO 7. Si A es un anillo cualquiera, la aplicación $F\colon A \longrightarrow A$, dada por $F(x)=0 \ \forall \ x \in A$, es un endomorfismo llamado *endomorfismo cero.*

EJEMPLO 8. La aplicación del cuerpo C de los números complejos sobre sí mismos, dada por $F(z)=\bar{z}$, es un automorfismo.

TEOREMA 2. *Si* $F\colon A \longrightarrow A'$ *es un homomorfismo entre anillos se verifica:*

1.° $F(0)=0'$,
2.° $F(-x)=-F(x)$,
3.° $F^{-1}(0')=\{x \in A \mid F(x)=0'\}$ *es un ideal de* A,
4.° $F(A)$ *es un subanillo de* A',
5.° *Si* A *es conmutativo también lo es* $F(A)$.

Demostración: 1.° y 2.° son consecuencia de ser F homomorfismo entre A y A' considerados como grupos y están demostrados (con notación multiplicativa) en el teorema 5 de [5.3].

Análogamente sucede con la parte de 3.° que asegura que $F^{-1}(0')$ es subgrupo de A; sólo queda por demostrar que si $x \in F^{-1}(0')$ y $a \in A \Longrightarrow ax,\ xa \in F^{-1}(0')$. Ahora bien, si $x \in F^{-1}(0') \Longrightarrow F(x)=0' \Longrightarrow$ $\Longrightarrow F(ax)=F(a)F(x)=F(a)0'=0'$ y, análogamente, $F(xa)=0'$.

Obsérvese que, en general, no tiene por que ser $F(1)=1'$.

A $F^{-1}(0')$ se le llama *núcleo del homomorfismo* F.

EJEMPLO 9. En el ejemplo 6 anterior, el núcleo del homomorfismo es $2Z$.

EJEMPLO 10. En el ejemplo 7 de más arriba, el núcleo del endomorfismo es todo el anillo A.

EJEMPLO 11. En el ejemplo del automorfismo del cuerpo de los números complejos, el núcleo se reduce al elemento cero.

EJERCICIOS

1. Se llama subcuerpo de un cuerpo K a todo conjunto no vacío de K tal que, con las operaciones inducidas por las de K, es a su vez un cuerpo. Demuéstrese que $B \subset K$ es un subcuerpo del cuerpo K si y sólo si $x-y \in B$ y $xy^{-1} \in B$, cualesquiera que sean $x,\ y \in B$.

2. Demuéstrese que el conjunto de los números de la forma $x+y\sqrt{2}$, donde $x,\ y \in Q$ es un subcuerpo de R.

3. Demuéstrese que todo subcuerpo de R contiene a Q.

4. La aplicación $F\colon Z \longrightarrow Z$ dada por $F(x)=2x$, ¿es un endomorfismo de anillos?

5. Demuéstrese que todo cuerpo K no posee más ideales que $\{O\}$ y K.

6. Sean A y A' anillos unitarios y $F: A \longrightarrow A'$ un homomorfismo. Demuéstrese que si A' es un dominio de integridad, $F(1)=1'$.

7. Demuéstrese que la condición necesaria y suficiente para que un homomorfismo sobre sea un isomorfismo, es que el núcleo se reduzca al elemento cero.

6.3. Anillo cociente.

Sea A un anillo e I un ideal de A. Como I es un subgrupo de A y por ser éste respecto de la adición grupo abeliano, I es subgrupo normal, entonces tiene perfecto sentido hablar dle grupo cociente A/I. Desde luego, A/I es también abeliano. Vamos a ver que si en A/I se define la siguiente multiplicación

$$(x+I)(y+I)=xy+I,$$

obtenemos un anillo, al que se llama *anillo cociente* del anillo A respecto al ideal I.

En primer lugar, la multiplicación es uniforme. En efecto, si

$$x' \in x+I \text{ e } y' \in y+I \Longrightarrow x'=x+i_1,\ y+i_2$$

con $i_1,\ i_2 \in I$, luego

$$x'y'=(x+i_1)(y+i_2)=xy+xi_2+i_1y+i_1i_2=xy+i,$$

con $i=xi_2+i_1y+i_1i_2 \in I$, por ser éste un ideal, luego $x'y'+I=xy+I$.

La demostración de la propiedad asociativa y de las dos distributivas queda a cargo del lector.

EJEMPLO. El anillo cociente Z/nZ se compone de las clases $\{x \in Z \mid x=kn\}$, $\{x \in Z \mid x=kn+1\{$, ..., $\{x \in Z \mid x=kn+(n-1)\}$; podemos elegir para representar a estas clases los símbolos $\bar{0}$, $\bar{1}$ ..., $\overline{n-1}$. Se ve fácilmente entonces que este anillo es precisamente el del ejemplo 4 de [6.1]. Se le llama *anillo de enteros módulo n.*

TEOREMA 3. *Si* $F: A \longrightarrow A'$ *es un homomorfismo entre anillos e* I *es su núcleo, se tiene que* A/I *es isomorfo a* $F(A)$.

Demostración: Definamos $\varphi: A/I \longrightarrow F(A)$ mediante $\varphi(x+I)=F(x)\ \forall\ x \in A$. Ante todo, φ es una aplicación, pues si $x' \in x+I \Longrightarrow x'=x+i$, con $i \in I \Longrightarrow F(i)=0'$, luego $\varphi(x'+I)=F(x')=F(x+i)=F(x)+F(i)=F(x)$ y, por tanto, $\varphi(x'+I)=\varphi(x+I)$. Por otra parte, $\varphi[(x+I)+(y+I)]=\varphi[(x+y)+I]=F(x+y)=F(x)+F(y)=\varphi(x+I)+\varphi(y+I)$; $\varphi[(x+I)(y+I)]=\varphi(xy+I)=F(xy)=F(x)\cdot F(y)=\varphi(x+I)\cdot\varphi(y+I)$, luego φ es un homomorfismo y, evidentemente, es sobre. Por

último, si $\varphi(x+I)=0' \Longrightarrow F(x)=0' \Longrightarrow x \in I$, luego el núcleo de φ se reduce al elemento cero de A/I y, por tanto, de acuerdo con el Ej. 7 de [6.2], φ es un isomorfismo.

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que a condición necesaria y suficiente para que el anillo de enteros, módulo n, Z/nZ, sea un cuerpo, es que n sea primo.

2. Demuéstrese que $nZ \cap mZ = dZ$, donde d=m.c.m. (n, m).

3. Se dice que un ideal M de un anillo A es maximal si para todo ideal $I \neq A$, tal que $M \subset I$ se tiene que $M=I$. Poner un ejemplo de ideal maximal en el anillo Z.

4. Sea A un anillo conmutativo con elemento unidad, demuéstrese que la condición necesaria y suficiente para que el anillo cociente A/I' sea un cuerpo es que I sea maximal.

6.4. Anillos euclídeos.

En lo que sigue, A será siempre un anillo conmutativo con elemento unidad y los elementos que se mencionen serán distintos de cero.

Dados $x, y \in A$, se dice que x *divide* a y y se escribe $x \mid y$, si existe un elemento $z \in A$ tal que $y=xz$. También se dice que x es un *divisor* de y o que y es un *múltiplo* de x. Los elementos x e y se llaman *asociados* si $x \mid y$ e $y \mid x$.

LEMA 3. *Si* s *es un elemento inversible de* A *y* x=ys *entonces* x *e* y *son asociados. Recíprocamente, si* x *e* y *son elementos asociados de un dominio de integridad, se tiene que* x=ys, *siendo* s *un elemento inversible.*

Demostración: Si $x=ys \Longrightarrow s^{-1}x=y \Longrightarrow y \mid x$ y $x \mid y$. Recíprocamente, si $y \mid x$ y $x \mid y \Longrightarrow x=ys$ e $y=xs'=y(ss')$ y, por tratarse de elementos de un dominio de integridad, $\Longrightarrow 1=ss' \Longrightarrow s'=s^{-1}$.

Si $x, y \in A$, se llama *máximo común divisor* de x e y y se denota por (x, y), a un elemento $d \in A$ tal que:

1. $d \mid x$ y $d \mid y$.
2. Si $c \mid x$ y $c \mid y \Longrightarrow c \mid d$.

A los elementos inversibles y a los elementos asociados de un elemento x de un anillo A, se les llama *divisores impropios* de dicho elemento x. Un elemento de A que no sea inversible se llama *irreducible* si no tiene más divisores que los impropios.

Se dice que un dominio de integridad es de *factorización única* si verifica:

1. Todo elemento no inversible es un producto finito de factores irreducibles.
2. La factorización anterior de un elemento es única, salvo el orden y factores inversibles.

Se dice que un dominio de integridad A es un *anillo euclídeo* si existe una aplicación φ de $A^* = A - \{0\}$ en el conjunto de los números enteros no negativos, tal que para todo par de elementos $x, y \in A$ se verifica:

1. $\varphi(x) \leq \varphi(xy)$.
2. $\exists\ q, r \in A \mid x = qy + r$ con $r = 0$ o $\varphi(r) < \varphi(y)$.

EJEMPLO DE ANILLO EUCLÍDEO. El anillo Z con $\varphi(x) = |x|$ (valor absoluto de x).

TEOREMA 4. *Si* I *es un ideal de un anillo euclídeo* A, *entonces existe un elemento* $x_0 \in A$ *tal que* $I = \{x \in A \mid x = yx_0\ \forall\ y \in A\}$. *Es decir,* I *se compone de todos los múltiplos de* x_0.

Demostración: Si $I = \{0\} \Longrightarrow x_0 = 0$. Si $I \neq \{0\}$ $\exists$ al menos un elemento de I distinto de cero; de entre todos los elementos de I distintos de cero elegimos uno, x_0, tal que $\varphi(x_0)$ sea mínimo (esto es posible por estar bien ordenado el conjunto de los enteros no negativos mediante la relación $\leq$); si $y \in I \mid y \neq 0$ $\exists\ q, r \in A \mid y = qx_0 + r$, con $r = 0$ o $\varphi(r) < \varphi(x_0)$, *pero* $r = y - qx_0 \in I$, luego la última relación no puede ser cierta por la forma en que se eligió x_0 y, por tanto, $r = 0 \Longrightarrow y = qx_0$.

COROLARIO. *Todo anillo euclídeo* A *es unitario.*

Demostración: A puede considerarse como un ideal de sí mismo, luego $\exists\ x_0 \in A \mid$ todo elemento x de A es de la forma $x = yx_0$, en particular, $x_0 = zx_0$, de donde $zx = zyx_0 = yzx_0 = yx_0 = x \Longrightarrow z = 1$.

Al ideal engendrado por un elemento x de un anillo A se le llama *ideal principal.* Si A es conmutativo y posee elemento unidad, el ideal engendrado por el elemento x se compone de todos los múltiplos de x. Si todos los ideales de un anillo son principales, se le llama *anillo de ideales principales.*

Con esta terminología el teorema 4 podría formularse nuevamente de la siguiente forma:

Todo anillo euclídeo es de ideales principales.

LEMA 4. *Si* x *e* y *son elementos de un anillo euclídeo* A, *en-*

tonces existe el máximo común divisor d *de* x *e* y *y se tiene* d = $= hx + ky$ *con* $h, k \in A$.

Demostración: Sea I el ideal engendrado por los elementos x e y; en virtud del teorema 4, el ideal I es principal; sea d el elemento del que son múltiplos todos los elementos de I, puesto que $x, y \in I$, d divide a x y a y; por otra parte, por estar engendrado por x e y, todos los elementos de I serán de la forma $ax+by$, en particular $d=hx+ky$, luego si z divide a x y a y, divide a d.

TEOREMA 5. *Todo anillo euclídeo es de factorización única.*

EJEMPLO 1. En el anillo de los enteros los únicos elementos inversibles son 1 y el -1; cada entero tiene un asociado, su opuesto; los elementos irreducibles de este anillo son los números primos.

EJERCICIOS

1. Demuéstrese el teorema 5.

2. Si x, y, z son tres elementos de un anillo euclídeo A, tales que $x|yz$ y $(x, y)=1$, demuéstrese que entonces $x|z$.

3. Demuéstrese que en un anillo conmutativo con elemento unidad, la relación x *es asociado de* y es una relación de equivalencia.

4. Pruébese que todo par de elementos x e y de un anillo euclídeo A poseen un *mínimo común múltiplo* en A, es decir, un elemento $m \in A$ tal que $x|m$ e $y|m$ y si $x|z$ e $y|z \Longrightarrow m|z$.

6.5. Anillos de polinomios.

En lo que sigue emplearemos la expresión *casi todos* con el sentido de *todos menos un número finito.*

Sea A un anillo conmutativo con elemento unidad, se llama *polinomio formal en una indeterminada sobre* A a toda sucesión $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ de términos de A, tal que casi todos ellos sean nulos. La sucesión $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ también es un polinomio.

Dos polinomios $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ y $(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ son iguales cuando $a_i = b_i \ \forall \ i \in Z_+$.

Al subíndice del último término no nulo se le denomina *grado* del polinomio. Emplearemos letras mayúsculas para representar polinomios y entonces el grado del polinomio P se representará por ∂P. El único polinomio al que no se le asigna grado es el $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Sea $A[x]$ el conjunto de polinomios formales en una indeterminada sobre el anillo A. Sobre este conjunto vamos a definir unas operaciones mediante las siguientes reglas:

Si $P=(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ y $Q=(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ son elementos de $A[x]$.

1. $P+Q=(a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n, \ldots)$.
2. $PQ=(a_0b_0, a_0b_1+a_1b_0, a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0 \ldots)$, es decir, si llamamos c_n al término general del polinomio PQ, tenemos

$$c_n=\sum_{i+j=n} a_ib_j.$$

Es fácil comprobar que:

a) $\partial(P+Q) \leq$ máx. $(\partial P, \partial Q)$.
b) $\partial(PQ) \leq \partial P+\partial Q$, si tales grados existen.

Propiedades de la adición de polinomios:

I. $P+(Q+S)=(P+Q)+S$.
II. $P+Q=Q+P$.
III. El polinomio $0=(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ es el elemento cero de esta adición.
IV. El polinomio opuesto del $P=(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ es el $(-a_0, -a_1, \ldots, -a_n, \ldots)=-P$.

Estas propiedades se demuestran con facilidad.

De acuerdo con ellas, el conjunto $A[x]$ con esta adición es un grupo abeliano.

Propiedades del producto:

I'. $P(QS)=(PQ)$S.
II'. $PQ=QP$.
III'. El polinomio $U=(1, 0, 0, \ldots, \ldots, \ldots)$ es el polinomio unidad.

Propiedad que relaciona la adición y la mutiplicación:

I''. $P(Q+S)=PQ+PS$.

En resumen, el conjunto $A[x]$ con estas dos operaciones, es un anillo conmutativo con elemento unidad. Se le llama *anillo de polinomios en una indeterminada sobre el anillo A*.

Se comprueba fácilmente que,

La aplicación φ: $A \longrightarrow A[x]$, *dada por* $\varphi(a) \longrightarrow (a, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ *es un homomorfismo inyectivo, luego A es isomorfo al subanillo* $\varphi(A)$ *de* $A[x]$.

Se suele identificar A con $\varphi(A)$ y con este convenio A resulta un subanillo de $A[x]$. Es decir, los polinomios de la forma $(a, 0,$

0, ..., 0, ...) se denotarán, de ahora en adelante, por a. A los polinomios de este tipo se les llama las *constantes* de $A[x]$.

Si denotamos por x al polinomio (0, 1, 0, ..., 0, ...), tenemos que el polinomio (0, 0, ..., a_n, ...), que tiene todos sus términos nulos, salvo el de índice n, se puede escribir en la forma $a_n x^n$. Por tanto, el polinomio $P=(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ de grado s se puede escribir así: $P=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_sx^s$, *con* $a_s \neq 0$.

TEOREMA 6. *Sea* K *un cuerpo conmutativo si* P, Q ∈ K[x], *existen dos polinomios* S, R ∈ K[x] *tales que,*

$$P=QS+R$$

con $R=0$ *o* $\partial R < \partial Q$.

Demostración por inducción sobre el grado de P: Si $\partial P < \partial Q$, tomamos $S=0$ y $R=P$. Si $\partial P=m \geq \partial Q=n \Longrightarrow P=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$ y $Q=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n$, con $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$; tomamos $P_1 = P-\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}Q$, con lo que $\partial P_1 \leq m-1$ y, en virtud de nuestra hipótesis de inducción $\exists\ S_1, R \in K[x] \mid P_1=QS_1+R$, con $R=0$ o $\partial R < \partial Q$; ahora bien de $P_1=P-\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}Q=QS_1+R \Longrightarrow P= Q\left[S_1+\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}\right]+R=QS+R$, donde se ha puesto $S=S_1+\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}$.

COROLARIO 1. K[x] *es un anillo euclídeo.*
Se toma $\varphi(P)=\partial P$.

COROLARIO 2. K[x] *es un anillo de ideales principales.*

COROLARIO 3. K[x] *es un dominio de factorización única.*

EJERCICIOS

1. Si A es un anillo conmutativo con elemento unidad y $P, Q \in A[x]$. ¿Puede ocurrir que $\partial(PQ) < \partial P+\partial Q$?

2. Demuéstrese que si A es un dominio de integridad, $A[x]$ también lo es. ¿En qué parte del párrafo anterior hubiera sido necesario emplear este resultado?

3. Sean $P=\bar{3}+\bar{2}x+\bar{3}x^2$ y $Q=\bar{1}+\bar{5}x+x^3-\bar{4}x^4$ dos polinomios de $Z/6Z[x]$. Calcúlese $P+Q$ y PQ.

4. ¿Cuántos polinomios de grado n sobre el cuerpo $Z/5Z$ se pueden formar?

5. ¿Cuántos polinomios irreducibles de 2.º grado sobre el cuerpo $Z/3Z$ y coeficiente del término de mayor grado igual a 1 se pueden formar? (Suge-

rencia: Recuérdese la definición de raíz de un polinomio y el hecho de que si a es una raíz del polinomio $x^2+a_1x+a_0$, éste es igual a $(x-a)(x-b)$.)

6. Hállese el máximo común divisor de los polinomios

$$P=2x^4-10x^3+11x^2+5x-6$$
$$Q=2x^4+x^2-1$$

sobre el cuerpo Q de los números racionales.

7. Pruébese que el polinomio $\bar{2}x^2+x+\bar{1}$ es irreducible sobre el cuerpo $Z/3Z$ y que el polinomio $\bar{2}x^2+\bar{5}x+\bar{2}$ es reducible sobre el cuerpo $Z/7Z$.

8. Sea K un cuerpo conmutativo. Demuéstrese que todo ideal del anillo $K[x]$ que contenga una constante es todo el anillo.

7

espacios vectoriales

El modelo de estructura algebraica que vamos a estudiar en el presente capítulo está basado en el concepto de magnitud dirigida, conocido con el nombre de vector, tan importante en Física. Los vectores son conceptos dinámicos que ayudan poderosamente a la intuición, proporcionando ilustraciones vividas y, por tanto, fácilmente comprensibles no sólo de fenómenos físicos, sino de problemas geométricos. Por otra parte, los conceptos básicos que se introducen con ellos (dependencia e independencia lineal, base, dimensión, etcétera), son hoy día de gran utilidad en todo el ámbito de las Matemáticas.

7.1. Vectores. Vectores libres.

Una recta puede recorrerse en dos sentidos distintos. En efecto, dados dos puntos distintos de ella, A y B, podemos recorrerla desde A hacia B o desde B hacia A. *Orientar* una recta es elegir uno de estos dos sentidos como positivo y el otro como negativo. Para determinar la orientación de una recta basta dar un par de puntos distintos de la misma enunciados en un cierto orden. Una recta junto con una orientación, es decir, una recta en la que se ha elegido un sentido de recorrido como positivo, se llama *recta orientada*.

Una misma orientación puede servir para rectas paralelas, pero para rectas no paralelas habrá que utilizar un convenio en cada caso.

Se llama *vector* del espacio a la pareja formada por un segmento de una recta del mismo y un sentido de los dos de recorrido de dicha recta. El sentido se determina por el orden en que se enuncian los extremos del segmento y el vector se simboliza mediante las dos letras mayúsculas que representan esos extremos con una flecha encima. De acuerdo con esta norma $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ representan vectores distintos, pues aunque el segmento es el mismo en ambos, el sentido es diferente. Al primero de los extremos del segmento se le llama

origen del vector, y al segundo *extremo*. Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ tienen, por tanto, sus orígenes y extremos cambiados entre sí. A la distancia entre los extremos del segmento se le llama *módulo* del vector y se representa poniendo el símbolo de éste entre barras verticales. Así, el módulo de $\overrightarrow{AB}$ es $|\overrightarrow{AB}|$ unidades de longitud. A la recta a que pertenece el segmento se le llama *soporte* del vector y determina la *dirección* de éste.

Cuando el segmento sea degenerado, es decir, cuando sus extremos coincidan, no se podrá hablar ni de dirección ni del sentido del vector, ya que la recta soporte estará indeterminada; y el módulo del vector será cero.

Dos vectores del espacio $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son iguales cuando $A=C$ y $B=D$, es decir, cuando realmente son el mismo vector.

El vector $\overrightarrow{AB}$ se dice *equipolente* al $\overrightarrow{CD}$ cuando el primero tiene la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido que el segundo. Por tanto, dos vectores equipolentes pueden tener distintas rectas soporte, aunque, naturalmente, éstas deben ser paralelas.

La relación de equipolencia de vectores es una relación de equivalencia. En efecto, se comprueba con facilidad que:

1. $\overrightarrow{AB}$ es equipolente a $\overrightarrow{AB}$.
2. Si $\overrightarrow{AB}$ es equipolente a $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}$ es equipolente a $\overrightarrow{AB}$.
3. Si $\overrightarrow{AB}$ es equipolente a $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CD}$ es equipolente a $\overrightarrow{EF}$, entonces $\overrightarrow{AB}$ es equipolente a $\overrightarrow{EF}$.

Como no habrá riesgo de confusión utilizaremos el símbolo de equivalencia $\sim$ para la equipolencia de vectores.

A cada una de las clases de equivalencia, en la partición que la relación de equipolencia determina sobre el conjunto de todos los vectores del espacio, se le llama *vector libre*. Así, pues, un vector libre se compone de infinitos vectores del espacio equipolentes entre sí; a cada uno de ellos se le llama representante del vector libre. La notación para vectores libres será minúsculas en negrilla $\mathbf{x}$ o un representante del vector libre entre llaves $\{\overrightarrow{AB}\}$, cuando se quiera poner de manifiesto tal representante de clase.

De acuerdo con lo que vimos al estudiar las relaciones de equivalencia, dos vectores libres serán iguales cuando un representante de clase de uno sea equipolente a un representante de clase del otro.

Se llaman dirección, módulo y sentido de un vector libre a la dirección, módulo y sentido de uno cualquiera de sus representantes de clase. La definición es coherente puesto que todos los representantes de un vector libre tienen la misma dirección, el mismo mó-

dulo y el mismo sentido. Naturalmente, para que dos vectores libres se puedan comparar en cuanto a sentido es necesario que tengan la misma dirección.

Existe un vector libre en el que la dirección y el sentido no están determinados, es el que está formado por todos los vectores del espacio cuyo segmento básico es degenerado. No obstante, está perfectamente caracterizado por ser el único vector libre cuyo módulo es 0.

LEMA 1. *Dado un vector libre* $\mathbf{x}$ *y un punto fijo del espacio* O, *existe un único representante del vector libre* $\mathbf{x}$ *con origen en* O.

La demostración es inmediata, si se recuerda que por un punto O del espacio pasa una sola recta r con una dirección dada y que sobre esa recta existen sólo dos puntos que distan de O una distancia también dada. El sentido del vector libre $\mathbf{x}$ y la orientación de la recta r determinan cuál de esos dos puntos ha de elegirse como extremo del vector pedido.

Sean los vectores libres $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Por un punto cualquiera O se traza el único representante $\overrightarrow{OA}$ del vector libre $\mathbf{x}$ con origen en O, y a partir de A el único representante AB de $\mathbf{y}$ con origen en A. Al vector libre uno de cuyos representantes es el vector $\overrightarrow{OB}$ se le llama *suma* de los vectores libres $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, y se representa por $\mathbf{x}+\mathbf{y}$. Es decir,

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\{\overrightarrow{OA}\}+\{\overrightarrow{AB}\}=\{\overrightarrow{OB}\}.$$

Para que esta definición tenga sentido es necesario demostrar que es independiente de los representantes de clase elegidos. Esta demostración, así como la de las propiedades siguientes, que solo comportan conocimientos elementales de geometría, quedan a cargo del lector.

La adición de vectores libres goza de las siguientes propiedades:

1. Es asociativa: $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$.
2. Es conmutativa: $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$.
3. Posee elemento neutro: $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$.
   (El lector comprobará sin dificultad que dicho vector $\mathbf{0}$ es el vector libre de módulo 0.)
4. Todo elemento posee opuesto: $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$.
   (Se ve fácilmente que el opuesto de $\mathbf{x}$ es el vector libre que tiene la misma dirección, el mismo módulo y sentido opuesto que $\mathbf{x}$.)

Se concluye, por tanto, que el conjunto de los vectores libres del espacio junto con la adición es un grupo abeliano.

Se llama producto de un número real α por un vector libre $\mathbf{x}$ y se representa por $\alpha\mathbf{x}$ al vector libre que tiene la misma dirección que $\mathbf{x}$, cuyo módulo es el producto del valor absoluto de α por el módulo de $\mathbf{x}$ ($|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha||\mathbf{x}|$) y cuyo sentido es el mismo u opuesto al de $\mathbf{x}$ según que α sea positivo o negativo.

Obsérvese que esta operación (producto de un número real por un vector libre) es una aplicación del conjunto producto cartesiano del conjunto de los números reales por el conjunto de los vectores libres del espacio en este último conjunto. A este tipo de aplicación se le llama *ley de composición externa,* al conjunto *R dominio de operadores* y a los elementos de este último conjunto *escalares.*

Las propiedades de la ley de composición externa que acabamos de definir y las que la relacionan con la adición, tanto de vectores libres como de números reales, son las siguientes:

1′. $(\alpha+\beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$.
2′. $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.
3′. $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$.
4′. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Su demostración es sencilla.

Se dice que dos vectores libres son *colineales* cuando tienen la misma dirección; y que tres vectores libres son *coplanarios* cuando representantes de cada uno de ellos con origen en un mismo punto están en un mismo plano.

Si dos vectores libres $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ distintos de $\mathbf{0}$ no son colineales y se verifica la relación $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}=\mathbf{0}$ con $\alpha, \beta \in R$, entonces $\alpha=\beta=0$. En efecto, si se verificase $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}=\mathbf{0}$ siendo alguno de los escalares distinto de 0, por ejemplo, α, tendríamos $\mathbf{x} = \frac{-\beta}{\alpha}\mathbf{y}$ con lo que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tendrían la misma dirección, en contra de lo supuesto.

Dados tres vectores libres coplanarios $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ distintos de $\mathbf{0}$, existe una relación de la forma $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}+\gamma\mathbf{z}=\mathbf{0}$, con al menos uno de los escalares distinto de 0. En efecto, si dos de los vectores son colineales, por ejemplo, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, bastaría tomar $\alpha = \pm\frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|}$, $\beta=1$, $\gamma=0$ (el signo $+$ si x e y tienen sentidos opuestos, y el signo $-$ en caso contrario); si dos a dos no son colineales, tomemos representantes

de clase $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, respectivamente (véase la figura) proyectemos C sobre cada una de las rectas determinadas por los puntos O, A y por los O, B paralelamente a la otra, obteniendo así los puntos A' y B'. Tenemos que,

$$\mathbf{z} = \{\overrightarrow{OC}\} = \{\overrightarrow{OA'}\} + \{\overrightarrow{OB'}\} = \lambda\{OA\} + \mu\{OB\} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$$

de donde

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} - \mathbf{z} = 0.$$

Se dice que los vectores libres $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_n$ son *linealmente*

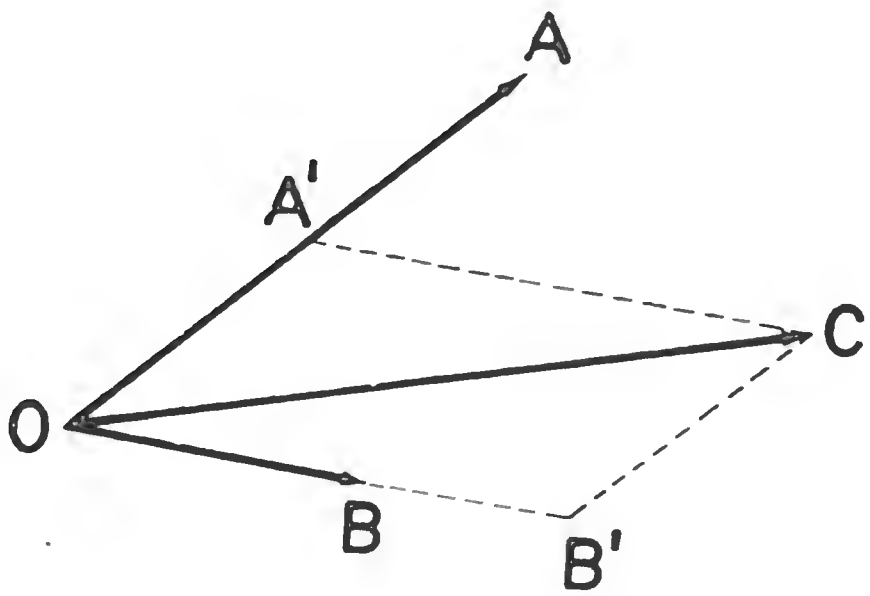


FIG. 10

dependientes cuando existen n números reales λ_1, λ_2, ..., λ_n no todos nulos tales que

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots\lambda_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

En caso contrario se dice que son *linealmente independientes.*

TEOREMA 1. *El máximo número de vectores libres coplanarios, linealmente independientes, es dos.*

De manera análoga se demostraría el

TEOREMA 2. *El máximo número de vectores libres del espacio, linealmente independientes, es tres.*

EJERCICIOS

1. Demuéstrese la propiedad conmutativa de la adición de vectores libres.

2. Si los vectores libres x e y no son colineales ni nulos y se verifica una relación de la forma

$$\alpha x+\beta y=\gamma x+\delta y,$$

demuéstrese que $\alpha=\gamma$ y $\beta=\delta$.

3. Demuéstrese vectorialmente que si dos lados de un cuadrilátero son iguales y paralelos, los otros dos son también iguales entre sí y paralelos.

4. Demuéstrese vectorialmente que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

5. Sean x e y dos vectores no colineales distintos de O. Pruébese que el conjunto de los vectores de la forma $\alpha x+\beta y$, donde α y β recorren R, forman un grupo abeliano infinito respecto de la adición. Compruébese que el conjunto es estable respecto a la ley de combinación externa.

6. Se tienen dos ternas de vectores libres linealmente independientes $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, tales que $\mathbf{v}_i=\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\mathbf{u}_j$. Si $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{3} b_i\mathbf{u}_i$, hállese la expresión del vector x en función de los $\mathbf{v}_i$.

7. Sean A, B, C tres puntos alineados y O un punto fijo. Si $\frac{AB}{BC}=\frac{\alpha}{\beta}$, exprésese el vector libre $\{\overrightarrow{OB}\}$ en función de los $\{\overrightarrow{OA}\}$ y $\{\overrightarrow{OC}\}$.

8. La velocidad de un avión es de 600 km/h si la atmósfera está en calma. Debe viajar rumbo al sur y el viento sopla desde el NE con velocidad constante de 50 km/h. Hállense el rumbo que debe tomar y la velocidad que lleva el avión con respecto a Tierra.

7.2. Espacios vectoriales. Variedades lineales.

Se llama *espacio vectorial sobre un cuerpo* K a un conjunto V y dos leyes de composición, una interna sobre V y otra externa entre elementos de K como dominio de operadores y elementos de V tales que:

I. V junto con la ley de composición interna, que se denota aditivamente, es un grupo conmutativo.

II. La ley de composición externa $(\alpha, x)\longrightarrow \alpha x$, cumple las relaciones:

1. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.
2. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.
3. $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$.
4. $1x=x$.

cualesquiera que sean $\alpha, \beta\in K$, $x, y\in V$.

Denotaremos los elementos de K con letras griegas y los llamaremos *escalares;* a los elementos de V los denotaremos con letras latinas minúsculas y les llamaremos *vectores.*

Como consecuencia de I, son ciertas para los vectores todas las propiedades que se demostraron en le capítulo 5 al estudiar la estructura de grupo: unicidad del cero, unicidad del opuesto de cada elemento, propiedad de simplificación, etc.

LEMA 1. *En todo espacio vectorial* V *sobre un cuerpo* K *se verifica*:

1. $0x=0 \ \forall \ x \in V.$
2. $\alpha 0=0 \ \forall \ \alpha \in K.$
3. Si $\alpha x=0 \Longrightarrow \alpha=0$ o $x=0.$
4. $(-\alpha)x=-(\alpha x) \ \forall \ \alpha \in K$ y $\forall \ x \in V.$
5. $\alpha(-x)=-(\alpha x), \ \forall \ \alpha \in K \ \forall \ x \in V.$
6. Si $\alpha x=\beta x$ y $x \neq 0 \Longrightarrow \alpha=\beta.$
7. Si $\alpha x=\alpha y$ y $\alpha \neq 0 \Longrightarrow x=y.$

Ante todo, debe observarse que el símbolo 0 se emplea indistintamente para representar el cero escalar y el cero vector.

Demostración:

1. $\alpha x=(a+0)x=\alpha x+0x \Longrightarrow 0x=0.$
2. $\alpha x=\alpha(x+0)=\alpha x+\alpha 0 \Longrightarrow \alpha 0=0.$
3. Si $\alpha \neq 0 \ \exists \ \alpha^{-1} \mid \alpha^{-1}\alpha=1,$ luego de $\alpha x=0 \Longrightarrow \alpha^{-1}(\alpha x)=$ $=(\alpha^{-1}\alpha)x=1x=x=0.$
4. $0=[\alpha+(-\alpha)]x=\alpha x+(-\alpha)x \Longrightarrow (-\alpha)x=-(\alpha x).$
6. $\alpha x=\beta x \Longrightarrow \alpha x+[-(\beta x)]=\alpha x+(-\beta)x=(\alpha-\beta)x=0,$ que con $x \neq 0 \Longrightarrow \alpha-\beta=0 \Longrightarrow \alpha=\beta.$
7. $\alpha x=\alpha y \Longrightarrow \alpha x+[-(\alpha y)]=\alpha x+[\alpha(-y)]=\alpha[x+(-y)]=0,$ que con $\alpha \neq 0 \Longrightarrow x+(-y)=0 \Longrightarrow x=y.$

EJEMPLO 1. El conjunto de los vectores libres del espacio es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

EJEMPLO 2. Si $K[x]$ es el anillo de polinomios en una indeterminada sobre un cuerpo K y en él se define la siguiente ley de combinación externa

$$k(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)=ka_0+ka_1x+ka_2x^2+\ldots+ka_nx^n, \qquad k \in K,$$

entonces $K[x]$, con la adición de polinomios y con esta ley de combinación externa, es un espacio vectorial sobre el cuerpo K.

EJEMPLO 3. El conjunto R^n con las operaciones

a) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)+(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n)$.
b) $\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n), \quad \lambda \in R$

es un espacio vectorial sobre el cuerpo R. Compruébese.

EJEMPLO 4. El conjunto de las funciones reales de variable real, continuas en el intervalo $[a, b]$, es un espacio vectorial sobre R.

EJEMPLO 5. El conjunto de los números complejos es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales respecto a la adición y a la multiplicación de C (esta última como ley de composición externa).

EJEMPLO 6. Sea $\mathcal{A}(A, K)$ el conjunto de las aplicaciones de un conjunto A en un cuerpo K. Este conjunto junto con las operaciones definidas por:

a) $[F+G](x)=F(x)+G(x) \qquad \forall\ x \in A,$
b) $[\lambda F](x)=\lambda F(x) \qquad \forall\ x \in A,$

siendo $F, G \in \mathcal{A}(A, K)$ y $\lambda \in K$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo K.

EJEMPLO 7. El conjunto de los vectores del espacio con origen en un punto fijo O es un espacio vectorial sobre el cuerpo R.

Si V es un espacio vectorial sobre K y si un subconjunto W de V es un espacio vectorial respecto a las operaciones definidas en V, se dice que W es un *subespacio vectorial* de V. Luego, si W es un subespacio vectorial de V, se verifica:

1. W es un subgrupo aditivo de V.
2 $\alpha x \in W\ \forall\ \alpha \in K$ y $\forall\ x \in W$.

Es decir, para demostrar que $W \subset V$ es un subespacio vectorial de V tendremos que probar:

a) Si $x, y \in W \Longrightarrow x+y \in W$.
b) Si $\alpha \in K$ y $x \in W \Longrightarrow \alpha x \in W$.

A los subespacios vectoriales se les llama también *variedades lineales.*

EJEMPLO 8. El conjunto de los vectores libres del espacio de la forma λx, siendo x fijo y recorriendo λR, es una variedad lineal del espacio vectorial de los vectores libres del espacio.

EJEMPLO 9. El conjunto de los polinomios de $K[x]$ de grados

menores o iguales que un cierto número natural n es una variedad lineal del espacio vectorial $K[x]$ sobre K [9].

EJEMPLO 10. El suconjunto $\{0\}$ es una variedad lineal de cualquier espacio vectorial.

EJEMPLO 11. El conjunto de los vectores del espacio vectorial R^n sobre R de la forma $(\alpha_1, \alpha_2, 0, \ldots, 0)$, es una variedad lineal del mismo.

EJEMPLO 12. El conjunto de los vectores $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ del espacio vectorial R^4 sobre R, que cumplen las condiciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

es una variedad lineal.

EJEMPLO 13. Las variedades lineales en el espacio vectorial de todos los vectores del espacio con origen en un punto fijo son:

a) $\{0\}$.
b) Las de la forma αx, donde x es un vector fijo distinto de cero y α recorre R. A este tipo de variedades lineales se les llama *rectas vectoriales.*
c) Los subconjuntos de vectores de la forma $\alpha x + \beta y$ con x e y fijos, no colineales y distintos de cero y α y β recorriendo R. Se les llama *planos vectoriales.*
d) Todo el espacio vectorial.

Se comprueba fácilmente que la intersección de una familia de variedades lineales de un mismo espacio vectorial es también una variedad lineal.

Se llama *variedad lineal engendrada* por un subconjunto A de V, a la mínima variedad lineal de V que contiene a A. Se la representa por $L(A)$. Es evidente que la variedad lineal engendrada por A es la intersección de todas las variedades lineales que contienen a A. A los elementos de A se les llama *sistema de generadores* de $L(A)$. El espacio vectorial V se dice de *dimensión finita* sobre K, si existe un subconjunto finito $A \subset V$ tal que $V = L(A)$, es decir, si V posee un sistema finito de generadores. Estos espacios vectoriales de dimensión finita serán los únicos que estudiaremos.

EJEMPLO 14. El conjunto de todos los polinomios en una indeterminada sobre el cuerpo K, de grados menores o iguales que n, es un espacio vectorial sobre K que admite como sistema de generadores el conjunto $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Es, pues, un espacio vectorial de dimensión finita.

---

[9] Se supone que el polinomio cero pertenece también a este conjunto.

Se llama *suma* de dos variedades lineales L_1 y L_2 de un mismo espacio vectorial V, al conjunto

$$L_1+L_2=\{x\in V \mid x=x_1+x_2, \quad \text{con} \quad x_1\in L_1 \quad \text{y} \quad x_2\in L_2\}.$$

La suma de dos variedades lineales es también una variedad lineal.

En efecto, si

$$x,\ y\in L_1+L_2 \Longrightarrow \begin{cases} x=x_1+x_2 \\ y=y_1+y_2 \end{cases},$$

con

$$\begin{cases} x_1,\ y_1\in L_1 \\ x_2,\ y_2\in L_2 \end{cases},$$

luego

$$x+y=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)\in L_1+L_2,$$

ya que

$$\begin{cases} x_1+y_1\in L_1 \\ x_2+y_2\in L_2 \end{cases}$$

por ser L_1 y L_2 variedades lineales. Además, si

$$\alpha\in K \Longrightarrow \alpha x=\alpha(x_1+x_2)=\alpha x_1+\alpha x_2\in L_1+L_2,$$

pues

$$\begin{cases} \alpha x_1\in L_1 \\ \alpha x_2\in L_2 \end{cases},$$

por la misma razón que antes.

Si dos variedades lineales L_1 y L_2 del espacio vectorial V son tales que,

1. $L_1+L_2=V$.
2. $L_1\cap L_2=\{0\}$.

se dice que son *suplementarias*. También se suele decir que V es *suma directa* de L_1 y L_2. Se representa por $V=L_1\oplus L_2$.

EJEMPLO 15. Sea el espacio vectorial de todos los vectores del espacio con origen en un punto fijo. Si los vectores a, b, c son linealmente independientes, la recta vectorial $L_1=\{x \mid x=\alpha a,\ \alpha\in R\}$ y el plano vectorial $L_2=\{x \mid x=\alpha b+\beta c,\ \alpha,\beta\in R\}$ son variedades lineales suplementarias.

Obsérvese que una variedad lineal puede tener más de una variedad lineal suplementaria.

EJERCICIOS

1. Si A es un subconjunto del espacio vectorial V sobre el cuerpo K se llama *combinación lineal* de elementos de A a todo elemento de V de la forma $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, donde las $\lambda_i \in K$ y las $x_i \in A$. Demuéstrese que si $A \subset V$, $L(A)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de A.

2. Si L_1 y L_2 son variedades lineales de V, demuéstrese que $L_1+L_2= =L(L_1 \cup L_2)$.

3. Cítense dos variedades lineales suplementarias del conjunto de los números complejos como espacio vectorial sobre R.

4. Demuéstrese que si las variedades lineales L_1 y L_2 son suplementarias, la expresión de un elemento x de V como suma de un elemento de L_1 y otro de L_2 es única.

5. Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Demuéstrese que $V_1 \times V_2$, junto con las operaciones definidas por

$$a) \quad (x_1, x_2)+(y_1, y_2)=(x_1+y_1, x_2+y_2),$$
$$b) \quad \alpha(x_1, x_2)=(\alpha x_1, \alpha x_2) \quad \text{con} \quad \alpha \in K,$$

es un espacio vectorial sobre K. Se le denomina *espacio vectorial producto* de los V_1 y V_2.

6. El conjunto de todos los polinomios de grados iguales a n, donde n es un número natural fijo, ¿es una variedad lineal del espacio vectorial $K[x]$ sobre K?

7.3. Dependencia lineal.

Se dice que el vector x es *combinación lineal* de los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_h$ si existen h escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ tales que $x=\lambda_1 x_1+ +\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_h x_h$.

Obsérvese que el vector 0 es combinación lineal de cualquier conjunto finito de vectores. Basta tomar todas las $\lambda_i=0$.

Se dice que los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_h$ son *linealmente dependientes* si existen h escalares, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$, no todos nulos, tales que $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_h x_h=0$. En caso contrario, se dice que son *linealmente independientes*. Es decir, los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_h$ son linealmente independientes si $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_h x_h=0$ implica que $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_h=0$.

Si los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_h$ son linealmente independientes, se dice también que la familia $\{x_i\}_{1 \le i \le h}$ es *libre*, en caso contrario se dice que es *ligada*.

S comprueba inmediatamente que:

a) toda familia que contiene al vector cero es ligada;
b) todo vector distinto de cero es linealmente independiente;
c) toda familia que contenga a una subfamilia ligada es ligada;
d) toda subfamilia de una familia libre es libre, y
e) una familia libre no puede contener dos vectores iguales.

TEOREMA 3. *La condición necesaria y suficiente para que los vectores* $x_1, x_2, \ldots, x_h$ *sean linealmente dependientes, es que al menos uno de ellos dependa linealmente de los restantes.*

Demostración:

Hipótesis: la familia $\{x_i\}_{1 \leq i \leq h}$ es ligada. Entonces $\exists$ h escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$, no todos nulos, por ejemplo $\lambda_1 \neq 0$, tales que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_h x_h = 0$, de donde:

$$x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_h}{\lambda_1}\right) x_h$$

con lo que x_1 depende linealmente de los $x_2, \ldots, x_h$, luego la condición es necesaria.

Hipótesis: $x_1 = \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_h x_h$. Entonces $-x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_h x_h = 0$ y seguramente uno de los escalares (el primero) es distinto de cero, luego la condición es suficiente.

Se dice que los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ constituyen una *familia libre maximal* si la familia $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es libre y si todo vector constituye con ellos una familia ligada.

Si $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es una familia libre maximal y x es un vector cualquiera de V, se tiene $\lambda x + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, con al menos un coeficiente distinto de cero. Desde luego, $\lambda \neq 0$, pues, en caso contrario, la familia $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ no sería libre. Por tanto,

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n,$$

luego toda familia libre maximal es un sistema de generadores de V.

TEOREMA 4. *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo* K; G *un sistema finito de generadores de* V *y* L *un subconjunto de* G *cuyos elementos son linealmente independientes. En estas condiciones existe una familia libre maximal* $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ *de elementos de V, tal que*

$$L \subset \{x_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset G.$$

Demostración: Entre todas las familias libres de elementos de G

que contienen a L, consideremos una de las que tienen el mayor número de elementos, $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$. Para demostrar que es libre maximal basta probar que es un sistema de generadores de V y, para ello, es suficiente probar que todo elemento de G es combinación lineal de los elementos de $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$. Sea $x\in G$, se tiene:

$$L\subset[\{x_i\}_{1\leq i\leq n}\cup\{x\}]\subset G;$$

por la forma en que se ha elegido n, $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}\cup\{x\}$ no es una familia libre, luego existen $n+1$ escalares λ, λ_1, λ_2, ..., λ_n, no todos nulos tales que

$$\lambda x+\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n=0$$

y λ tiene que ser distinto de cero, pues, en caso contrario, la familia $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ no sería libre. En definitiva, x depende linealmente de lás x_i, $i=1, 2, \ldots, n$, como queríamos demostrar.

TEOREMA 5. *Si un espacio vectorial* V *de dimensión finita sobre un cuerpo* K *contiene dos familias libres maximales* $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ e $\{y_i\}_{1\leq i\leq m}$, *éstas tienen el mismo número de elementos, es decir,* $n=m$.

La demostración es por reducción al absurdo. Supongamos que $n>m$. La familia $\{y_i\}_{1\leq i\leq m}$ es un sistema de generadores de V y, por tanto, x_1 se puede expresar como combinación lineal de las y_i,

$$x_1=\lambda_1y_1+\ldots+\lambda_my_m$$

y todas las λ_i no pueden ser cero, ya que $x_1\neq 0$. Supongamos $\lambda_1\neq 0$, entonces:

$$y_1=\frac{1}{\lambda_1}x_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}y_2-\ldots-\frac{\lambda_m}{\lambda_1}y_m.$$

Reemplazando en $\{y_i\}_{1\leq i\leq m}$ y_1 por este valor, resulta que todo vector de V, en particular x_2, se puede expresar como combinación lineal de x_1, y_2, ..., y_m

$$x_2=\mu_1x_1+\mu_2y_2+\ldots+\mu_my_m$$

y los coeficientes μ_2, ..., μ_m no pueden ser todos nulos, pues si lo fueran, x_1 y x_2 serían linealmente dependientes. Supongamos μ_2 distinto de cero. Se deduce entonces y_2 como combinación lineal de x_1, x_2, y_3, ..., y_m, con lo que, reemplazando y_2 por su valor, todo vector de V, en particular x_3, se puede expresar como combinación lineal de x_1, x_2, y_3, ..., y_m. En la etapa m-ésima de este proceso se llega a la conclusión de que todo vector de V, en particular x_{m+1} (y este vector existe, puesto que hemos supuesto $n>m$), es combinación lineal de los vectores x_1, x_2, ..., x_m, lo que está en contradicción con

el hecho de ser $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una familia libre. Por tanto, $n \leq m$. Por simetría se tiene que $m \leq n$. Y de ambas relaciones, $n = m$.

Al número de elementos de cualquier familia libre maximal de un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo K, se le llama *dimensión* de V.

Al conjunto de vectores que constituye una familia libre maximal se le llama *base* del espacio vectorial. Una base es, pues, un conjunto de generadores del espacio vectorial linealmente independientes.

EJEMPLO 1. En el espacio vectorial R^n, los vectores $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ constituyen una base. En efecto, si

$$(0, 0, \ldots, 0) = \lambda_1(1, 0, \ldots, 0) + \lambda_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + \lambda_n(0, 0, \ldots, 1) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (0, 0, \ldots, 0) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \Longrightarrow \lambda_i = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

luego son linealmente independientes. Además, son un sistema de generadores de R^n, ya que

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1(1, 0, \ldots, 0) + \lambda_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + \lambda_n(0, 0, \ldots, 1).$$

La dimensión de este espacio vectorial es, por consiguiente, n. La base que acabamos de considerar se denomina *base canónica* del espacio vectorial R^n.

EJEMPLO 2. En el espacio vectorial de los números complejos sobre el cuerpo de los números reales, cualquiera de los siguientes conjuntos es una base: $\{1, i\}$, $\{1, -i\}$, $\{1, 1+i\}$, $\{-3, i\}$. La dimensión en este caso es 2.

TEOREMA 6. *La expresión de un vector* x *de un espacio vectorial* V *de dimensión finita sobre un cuerpo* K, *respecto de los elementos de una base* $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *es única y, recíprocamente, si todo vector* x *de* V *se puede expresar de manera única respecto de los elementos* $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, *éstos constituyen una base.*

Demostración: Supongamos que

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n,$$

se tendría

$$(\alpha_1 - \beta_1)u_1 + (\alpha_2 - \beta_2)u_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)u_n = 0$$

y como las u_i son linealmente independientes, se tiene que verificar $\alpha_i - \beta_i = 0$, para $i = 1\ 2, \ldots, n$, de donde $\alpha_i = \beta_i$ para los mismos valores de i.

La demostración del recíproco es trivial.

A los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ que aparecen en la expresión del vector x como combinación lineal de los elementos de una base, se les llama *coordenadas* de x respecto a dicha base.

Se llama *rango* de una familia de vectores $\{x_i\}_{i \in I}$ al mayor número de vectores de la familia linealmente independientes. El rango de una familia de vectores es, evidentemente, igual a la dimensión de la variedad lineal engendrada por dicha familia.

EJEMPLO 3. Las coordenadas del vcetor $(3, -2, 0, 7)$ respecto a la base canónica de R^4 son $3, -2, 0, 7$.

EJERCICIOS

1. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_h\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial de dimensión n. Demuéstrese que existen $n-h$ vectores $\{y_{h+1}, y_{h+2}, \ldots, y_n\}$ de V tales que, junto con los anteriores, constituyen una base.

2. Demuéstrese que las variedades lineales $L(x_1, x_2, \ldots, x_h)$ y $L(y_{h+1}, y_{h+2}, \ldots, y_n)$, donde las x_i e y_i son las del ejercicio anterior, son variedades lineales suplementarias.

3. Demuéstrese que si L es una variedad lineal del espacio vectorial V de dimensión n, entonces L es un espacio vectorial de dimensión finita m y $m \leq n$; y si $m = n \Longrightarrow L = V$.

4. Hállese la relación que liga las coordenadas de un vector x respecto a una base $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$ con las coordenadas del mismo vector respecto a otra base $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$ cuando se conocen las coordenadas de los vectores de la segunda base respecto a la primera.

5. Demuéstrese que si los vectores $\{x_i\}_{1 \leq i \leq r}$ dependen linealmente de los $\{y_i\}_{1 \leq i \leq s}$ y éstos, a su vez, dependen linealmente de los $\{z_i\}_{1 \leq i \leq t}$ entonces los primeros dependen linealmente de los últimos.

6. Hállese la dimensión y una base de la variedad lineal del ejemplo 12 de [7.2].

8

aplicaciones lineales

8.1. Aplicaciones lineales, propiedades.

Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Se dice que una aplicación $F: V \longrightarrow V'$ es *lineal*, si verifica las condiciones siguientes:

I. $F(x+y)=F(x)+F(y) \quad \forall \quad x,y \in V,$
II. $F(\alpha x)=\alpha F(x) \quad \forall \quad x \in V \quad \text{y} \quad \forall\, \alpha \in K.$

A las aplicaciones lineales se les llama también homomorfismos de espacios vectoriales.

En virtud de I, F es un homomorfismo entre V y V' considerados como grupos aditivos, luego:

1. $F(0)=0,$
2. $F(-x)=-F(x).$

Si la aplicación lineal F es biyectiva se llama *isomorfismo;* si es $V=V'$ en lugar de aplicación lineal se dice *endomorfismo* y a todo endomorfismo biyectivo se le llama *automorfismo.*

EJEMPLO 1. La aplicación $\theta: V \longrightarrow V'$, dada por $\theta(x)=0$ para todo $x \in V$, es lineal. Se le llama homomorfismo cero.

EJEMPLO 2. Si $V=L_1 \oplus L_2$, es decir, si todo $x \in V$ se puede escribir de manera única en la forma $x=x_1+x_2$, con $x_1 \in L_1$ y $x_2 \in L_2$, las aplicaciones de V en sí mismo, dadas por $F(x)=x_1$ y $G(x)=x_2$, respectivamente, son endomorfismos de V.

EJEMPLO 3. Si α es un elemento fijo de K y éste es conmutativo, la aplicación $F: V \longrightarrow V$, dada por $F(x)=\alpha x$, es un endomorfismo de V y si $\alpha \neq 0$, es un automorfismo. En efecto,

$$F(x+y)=\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y=F(x)+F(y);$$
$$F(\lambda x)=\alpha(\lambda x)=(\alpha\lambda)x=(\lambda\alpha)x=\lambda(\alpha x)=\lambda F(x)$$

y, por último, si $\alpha \neq 0$ existe el elemento $a^{-1} \in K$ y todo elemento $x \in V$ es imagen mediante F de otro elemento de V, a saber: el $\alpha^{-1}x$, luego la aplicación es sobreyectiva. Es también inyectiva, pues de $F(x)=F(y) \Longrightarrow \alpha x=\alpha y \Longrightarrow x=y$ en virtud de la propiedad 7 del lema 1 de [7.2]. A este tipo de aplicaciones lineales se les llama *homotecias* de *razón* α.

LEMA 1. *Si* F: V $\longrightarrow$ V′ *es una aplicación lineal se verifica:*

1. *Si* L *es una variedad lineal de* V, F(L) *es una variedad lineal de* V′. *En particular,* F(V) *es una variedad lineal de* V′.
2. *Si* L′ *es una variedad lineal de* V′, $F^{-1}(L')$ *es una variedad lineal de* V. *En particular,* $F^{-1}(0)$ *es una variedad lineal de* V, *llamada núcleo de* F.

Demostración:

1. Si

$$x',y' \in F(L) \quad \exists \quad x,y \in V \mid F(x)=x', \quad F(y)=y' \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x'+y'=F(x)+F(y)=F(x+y) \Longrightarrow x'+y' \in F(L),$$

puesto que

$$x+y \in L.$$

$$\lambda x'=\lambda F(x)=F(\lambda x) \Longrightarrow \lambda x' \in F(L),$$

ya que

$$\lambda x \in L.$$

2. Si

$$x,y \in F^{-1}(L') \Longrightarrow F(x), \; F(y) \in L' \Longrightarrow F(x+y)=F(x)+F(y) \in L',$$

por ser ésta una variedad lineal, luego

$$x+y \in F^{-1}(L').$$
$$F(\lambda x)=\lambda F(x) \in L', \quad \text{de donde} \quad x \in F^{-1}(L').$$

TEOREMA 1. *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo* K *y* V′ *un espacio vectorial sobre* K. *Si* $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$ *es una base de* V *y* $\{x_i'\}_{1 \leq i \leq n}$ *es una familia cualquiera de elementos de* V′, *entonces existe una aplicación lineal y sólo una* F: $V \longrightarrow V'$ *tal que* $F(u_i)=x_i'$ i = 1, 2, ..., n. *Si la familia* $\{x_i'\}_{1 \leq i \leq n}$ *es libre, la aplicación* F *es inyectiva; si es un sistema de generadores, es sobreyectiva y, por tanto, si es una base,* F *es un isomorfismo.*

Demostración: La aplicación F: $V \longrightarrow V'$, dada por

$$F(x)=F\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right)=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i',$$

es lineal. En efecto,

$$F(x+y)=F\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_i u_i\right)=F\left[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)u_i\right]=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)x_i'=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i'+\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i'=F(x)+F(y);$$

$$F(\lambda x)=F\left(\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i\right)=F\left[\sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)u_i\right]=\sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)x_i'=\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i'=\lambda F(x).$$

Evidentemente, $F(u_i)=x_i'$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Recíprocamente, si G es una aplicación lineal de V en V' tal que $G(u_i)=x_i'$, $i=1, 2, \ldots, n$, se tiene que

$$G(x)=G\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i G(u_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i'=F(x),$$

luego

$$F=G.$$

Si $\{x_i'\}_{1\leq i\leq n}$ es libre, de

$$F(x)=F(y)\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i'=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i'\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_i)x_i'=0\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\alpha_i-\beta_i=0\Longrightarrow\alpha_i=\beta_i,\qquad i=1, 2, \ldots, n,$$

por la independencia lineal de las x_i'.

Si $\{x_i'\}_{1\leq i\leq n}$ es un sistema de generadores, entonces todo elemento $x'\in V'$ es de la forma $x'=\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i'$ y éste es, evidentemente, el transformado mediante F del elemento $\sum_{i=1}^{n}\mu_i u_i\in V$.

Como consecuencia del teorema anterior, la condición necesaria y suficiente para que dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo K sean isomorfos, es que tengan la misma dimensión.

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que si $F: V\longrightarrow V'$ es una aplicación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K en otro espacio vectorial

sobre el mismo cuerpo K y L es una variedad lineal suplementaria del núcleo de F, se verifica:

$$\text{dimensión de } L = \text{dimensión de } F(V).$$

2. Si $F\colon V \to V'$ es una aplicación lineal y los elementos $a_1', a_2', \ldots, a_h'$ de $F(V)$ son linealmente dependientes y $F(a_i) = a_i'$, $i = 1, 2, \ldots, h$, ¿son también linealmente dependientes los a_i? Ilústrese la contestación con un ejemplo.

3. Demuéstrese que todo espacio vectorial V de dimensión finita n sobre un cuerpo K es isomorfo al espacio vectorial K^n.

4. Demuéstrese que la condición necesaria y suficiente para que la aplicación lineal $F\colon V \to V'$ sea inyectiva, es que su núcleo se reduzca a cero.

8.2. El espacio vectorial de las aplicaciones lineales. Anillo de endomorfismos de un espacio vectorial.

Consideremos todas las aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales V y V' de dimensión finita sobre un cuerpo conmutativo K. Al conjunto de dichas aplicaciones lineales le denotaremos por $\mathfrak{L}(V, V')$. Vamos a definir dos operaciones sobre este conjunto:

1. Si $F, G \in \mathfrak{L}(V, V)$, definimos $F+G$ mediante la igualdad

$$[F+G](x) = F(x) + G(x), \quad \forall \quad x \in V.$$

2. Si $\lambda \in K$, definimos la aplicación λF por la igualdad

$$[\lambda F](x) = \lambda F(x), \quad \forall \quad x \in V.$$

TEOREMA 2. *El conjunto* $\mathfrak{L}(V, V')$ *con estas dos operaciones es un espacio vectorial sobre el cuerpo conmutativo* K.

Demostración: En primer lugar, las aplicaciones $F+G$ y λF son lineales. En efecto,

$$[F+G](x+y) = F(x+y) + G(x+y) = F(x) + F(y) + G(x) + G(y) =$$
$$= F(x) + G(x) + F(y) + G(y) = [F+G](x) + [F+G](y);$$

$$[F+G](\lambda x) = F(\lambda x) + G(\lambda x) = \lambda F(x) + \lambda G(x) =$$
$$= \lambda[F(x) + G(x)] = \lambda[F+G](x);$$

$$[\lambda F](x+y) = \lambda F(x+y) = \lambda[F(x) + F(y)] = \lambda F(x) + \lambda F(y) =$$
$$= [\lambda F](x) + [\lambda F](y);$$

$$[\lambda F](\mu x) = \lambda F(\mu x) = \lambda[\mu F(x)] = (\lambda\mu)F(x) =$$
$$= (\mu\lambda)F(x) = \mu[\lambda F(x)] = \mu[\lambda F](x).$$

Obsérvese que es en esta última demostración, en el cuarto paso,

donde se ha hecho uso, por vez primera, de la hipótesis de ser el cuerpo K conmutativo.

Comprobemos que estas dos operaciones hacen de $\mathfrak{L}(V, V')$ un espacio vectorial sobre K.

1.

$$[(F+G)+H](x)=[F+G](x)+H(x)=[F(x)+G(x)]+H(x)=$$
$$=F(x)+[G(x)+H(x)]=F(x)+[G+H](x)=[F+(G+H)](x),$$

luego

$$(F+G)+H=F+(G+H).$$

2.

$$[F+G](x)=F(x)+G(x)=G(x)+F(x)=[G+F](x)\Longrightarrow F+G=G+F.$$

3. La aplicación θ: $V\longrightarrow V'$, dada por $\theta(x)=0 \quad \forall \quad x\in V$, se ha visto que es lineal. Hace el papel de elemento neutro respecto a la adición:

$$[\theta+F](x)=\theta(x)+F(x)=F(x)\Longrightarrow \theta+F=F.$$

4. Si F es una aplicación lineal, se comprueba fácilmente que la aplicación $-F$ definida mediante la igualdad

$$[-F](x)=-F(x) \quad \forall \quad x\in V,$$

es también lineal. Además,

$$[-F+F](x)=[-F](x)+F(x)=-F(x)+F(x)=0=\theta(x),$$

luego

$$-F+F=\theta.$$

5.

$$[(\alpha+\beta)F](x)=(\alpha+\beta)F(x)=\alpha F(x)+\beta F(x)=[\alpha F](x)+[\beta F](x)=$$
$$=[\alpha F+\beta F](x)\Longrightarrow(\alpha+\beta)F=\alpha F+\beta F.$$

6.

$$[\lambda(F+G)](x)=\lambda[F+G](x)=\lambda[F(x)+G(x)]=\lambda F(x)+\lambda G(x)=$$
$$=[\lambda F](x)+[\lambda G](x)=[\lambda F+\lambda G](x)\Longrightarrow\lambda(F+G)=\lambda F+\lambda G.$$

7.

$$[(\lambda\mu)F](x)=(\lambda\mu)F(x)=\lambda[\mu F(x)]=\lambda[\mu F](x)=$$
$$=[\lambda(\mu F)](x)\Longrightarrow(\lambda\mu)F=\lambda(\mu F).$$

8.

$$[1F](x)=1F(x)=F(x)\Longrightarrow 1F=F.$$

Sea ahora $V=V'$, entonces en lugar de considerar los homorfismos entre V y V', consideraremos el conjunto de los endomorfismos de V, al que denotaremos por $\mathfrak{E}(V)$.

Si F *y* G *son endomorfismos de* V, *su producto también lo es.* En efecto, $G \circ F(x)=G[F(x)]$ por definición, luego

$$[G \circ F](x+y)=G[F(x+y)]=G[F(x)+F(y)]=G[F(x)]+G[F(y)]=$$
$$=[G \circ F](x)+[G \circ F](y);$$
$$[G \circ F](\lambda x)=G[F(\lambda x)]=G[\lambda F(x)]=\lambda G[F(x)]=\lambda[G \circ F](x).$$

TEOREMA 3. *El conjunto* $\mathfrak{E}$(V) *de los endomorfismos de* V *con las aplicaciones* (F, G) $\longrightarrow$ F + G *y* (F, G) $\longrightarrow$ G $\circ$ F, *es un anillo con elemento unidad.*

Que es grupo abeliano respecto a la adición, se ha demostrado ya en el teorema anterior. La propiedad asociativa del producto está demostrada en el teorema 1 de [2.7]. Veamos la propiedad distributiva:

$$[F \circ (G+H)](x)=F\{[G+H](x)\}=F[G(x)+H(x)]=$$
$$=F[G(x)]+F[H(x)]=[F \circ G](x)+[F \circ H](x) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow F \circ (G+H)=F \circ G+F \circ H.$$

Análogamente, se demostraría que

$$(G+H) \circ F=G \circ F+H \circ F.$$

La aplicación idéntica I tal que $I(x)=x \quad \forall \quad x \in V$ es, desde luego, un endomorfismo de V y se comprueba fácilmente que hace el papel de elemento unidad.

El anillo $\mathfrak{E}(V)$ es, en general, no conmutativo.

Los elementos inversibles del anillo $\mathfrak{E}(V)$ son los elementos F, tales que existe otro elemento $F^{-1} \in \mathfrak{E}(V)$ que verifica

$$F \circ F^{-1}=F^{-1} \circ F=I,$$

es decir,

$$F[F^{-1}(x)]=x \quad \text{y} \quad F^{-1}[F(x)]=x \quad \forall \quad x \in V.$$

La primera de estas relaciones prueba que la aplicación F es sobreyectiva, puesto que todo elemento $x \in V$ es imagen por F de otro (el $F^{-1}(x)$); y utilizando la segunda en la igualdad $F(x)=F(y)$, se obtiene $x=y$, lo que prueba que F es inyectiva. Por tanto, *los elementos inversibles de anillo* $\mathfrak{E}$(V) *son los automorfismos de* V. *El conjunto* de estos automorfismos es un grupo respecto al producto, en general, no conmutativo, al que se representa por $\mathcal{GL}$ (V).

El conjunto $\mathcal{E}(V)$ es a la vez anillo y espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo K. A este tipo de estructuras algebraicas compuestas por un conjunto y tres leyes de composición, dos internas y una externa y que con las dos primeras son anillo y con la primera y tercera, espacio vectorial, se les llama *álgebras* [10].

Sea $F\colon V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo conmutativo K, y sean $\{u_i\}_{1\leq i\leq n}$ y $\{v_l\}_{1\leq l\leq m}$ sendas bases de dichos espacios. Hemos visto (teorema 1 de [8.1]) que F estaba determinada cuando se conocían los transformados de los elementos de una base de V, sean éstos

$$F(u_j)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}v_i, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Si $x\in V \Longrightarrow x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_j u_j$ y $F(x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda'_i v_i$, ya que por ser un elemento de V', $F(x)$ admite una representación única como combinación lineal de los elementos de la base $\{v_l\}_{1\leq i\leq m}$.

Vamos a tratar de expresar las coordenadas $(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m)$ de $F(x)$, en función de las coordenadas $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj})$ de los transformados $F(u_j)$ de los elementos de la base escogida en V y de las coordenadas $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ del elemento x, respecto a dicha base. Tenemos:

$$F(x)=F\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_j u_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_j F(u_j)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_j\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}v_i=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\lambda_j\right)v_i$$

y, teniendo en cuenta que $F(x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda'_i v_i$ y que la expresión de un vector respecto a los elementos de una base es única, obtendremos:

$$\lambda'_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\lambda_j, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

---

[10] En las álgebras se postula también

$$\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$$

que liga la ley de composición externa y la multiplicación. Es fácil comprobar que, en nuestro caso, se verifica dicha propiedad.

que escrito desarrollado es

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda'_1 = \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{1n}\lambda_n \\ \lambda'_2 = \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{2n}\lambda_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda'_m = \alpha_{m1}\lambda_1 + \alpha_{m2}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{mn}\lambda_n \end{cases}$$

que son las ecuaciones que buscábamos. Como se ve, una vez que se han elegido las bases en V y V', la aplicación lineal F queda perfectamente determinada cuando se conocen los mn escalares α_{ij}, debidamente ordenados en un cuadro que tiene m filas y n columnas. A este conjunto de mn elementos de un cuerpo K, distribudos en m filas y n columnas, se le llama *matriz sobre el cuerpo* K de dimensiones $m \times n$. Las matrices se denotan mediante letras mayúsculas y cuando se quiere poner de manifiesto sus elementos se escriben en la forma (α_{ij}). El primer subíndice del elemento α_{ij} indica el orden de la fila a que pertenece y el segundo el orden de la columna.

Así, pues a todo homomorfismo F entre dos espacios vectoriales V y V' de dimensiones respectivas n y m sobre un cuerpo conmutativo K, corresponde una matriz de m filas y n columnas, cuyos elementos pertenecen a K y, recíprocamente, a cada matriz de este tipo le corresponde mediante las ecuaciones (1) un homomorfismo entre V y V', como se puede comprobar. Ahora bien, para que esta correspondencia entre homomorfismos y matrices esté definida, es necesario que se hayan escogido de antemano las bases $\{u_i\}_{1\leq i\leq n}$ y $\{v_i\}_{1\leq i\leq m}$ en V y V', respectivamente. A un mismo homomorfismo le pueden corresponder matrices distintas si se eligen bases distintas. Diremos que (α_{ij}) es la matriz del homomorfismo $F\colon V \longrightarrow V'$ respecto a las bases $\{u_i\}_{1\leq i\leq n}$, $\{v_i\}_{1\leq i\leq m}$.

Sea G otro homomorfismo entre V y V' y (β_{ij}) su matriz respecto a las bases $\{u_i\}_{1\leq i\leq n}$, $\{v_i\}_{1\leq i\leq m}$, con lo que las ecuaciones de dicho homomorfismo respecto a las mencionadas bases serán

$$(2)\qquad \begin{cases} \mu'_1 = \beta_{11}\lambda_1 + \beta_{12}\lambda_2 + \ldots + \beta_{1n}\lambda_n \\ \mu'_2 = \beta_{21}\lambda_1 + \beta_{22}\lambda_2 + \ldots + \beta_{2n}\lambda_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu'_m = \beta_{m1}\lambda_1 + \beta_{m2}\lambda_2 + \ldots + \beta_{mn}\lambda_n \end{cases}$$

Vamos a hallar la matriz del homomorfismo $F+G$. Sabemos que

$$[F+G](x) = F(x) + G(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda'_i v_i + \sum_{i=1}^{m} \mu'_i v_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda'_i + \mu'_i) v_i,$$

luego las ecuaciones de $F+G$ respecto a las bases $\{u_i\}_{1\leq i\leq n}$, $\{v_i\}_{1\leq i\leq m}$ son

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda'_1+\mu'_1=(\alpha_{11}+\beta_{11})\lambda_1+(\alpha_{12}+\beta_{12})\lambda_2+\ldots+(\alpha_{1n}+\beta_{1n})\lambda_n \\ \lambda'_2+\mu'_2=(\alpha_{21}+\beta_{21})\lambda_1+(\alpha_{22}+\beta_{22})\lambda_2+\ldots+(\alpha_{2n}+\beta_{2n})\lambda_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda'_m+\mu'_m=(\alpha_{m1}+\beta_{m1})\lambda_1+(\alpha_{m2}+\beta_{m2})\lambda_2+\ldots+(\alpha_{mn}+\beta_{mn})\lambda_n \end{cases}$$

luego la matriz del homomorfismo $F+G$, respecto a las citadas bases, es $(\alpha_{ij}+\beta_{ij})$.

Sea ahora el homomorfismo λF. Tenemos que

$$[\lambda F](x)=\lambda F(x)=\lambda\sum_{i=1}^{m}\nu'_i v_i=\sum_{i=1}^{m}(\lambda\nu'_i)\,v_i,$$

luego sus ecuaciones serán

$$(4)\quad \begin{cases} \lambda\nu_1=(\lambda\alpha_{11})\lambda_1+(\lambda\alpha_{12})\lambda_2+\ldots+(\lambda\alpha_{1n})\lambda_n \\ \lambda\nu_2=(\lambda\alpha_{21})\lambda_1+(\lambda\alpha_{22})\lambda_2+\ldots+(\lambda\alpha_{2n})\lambda_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda\nu_m=(\lambda\alpha_{m1})\lambda_1+(\lambda\alpha_{m2})\lambda_2+\ldots+(\lambda\alpha_{mn})\lambda_n \end{cases}$$

con lo que la matriz del homomorfismo λF, siempre respecto a las bases escogidas inicialmente, será la $(\lambda\alpha_{ij})$.

Consideremos ahora un homomorfismo H entre V' y un tercer espacio vectorial V'', también sobre el mismo cuerpo K y de dimensión finita p. Elegida una base $\{w_i\}_{1\leq i\leq p}$ en V'', las ecuaciones de H respecto a esta base y a la $\{v_i\}_{1\leq i\leq m}$ de V', serán de la forma:

$$(5)\quad \begin{cases} \lambda_1''=\gamma_{11}\lambda_1'+\gamma_{12}\lambda_2'+\ldots+\gamma_{1m}\lambda'_m \\ \lambda_2''=\gamma_{21}\lambda_1'+\gamma_{22}\lambda_2'+\ldots+\gamma_{2m}\lambda'_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_p''=\gamma_{p1}\lambda_1'+\gamma_{p2}\lambda_2'+\ldots+\gamma_{pm}\lambda'_m \end{cases}$$

por lo que la matriz de H, respecto a las bases mencionadas será la (γ_{ij}) de dimensiones $p\times m$.

La aplicación $H\circ F$: $V\longrightarrow V''$, está definida, pues la imagen de F está contenida en el original de H. La demostración de que es lineal es análoga a la empleada en este mismo párrafo para probar que el producto de endomorfismos de un espacio vectorial es también un endomorfismo.

Vamos a calcular la matriz del homomorfismo $H \circ F$ respecto a las bases $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$ y $\{w_i\}_{1 \leq i \leq p}$. Tendremos que hallar, en primer lugar, las ecuaciones de $H \circ F$ respecto a dichas bases, expresando para ello las coordenadas $(\lambda_1'', \lambda_2'', \ldots, \lambda_p'')$ respecto a la base $\{w_i\}_{1 \leq i \leq p}$ del transformado $H[(x)] \in V''$ del vector $x \in V$ en función de las coordenadas de éste $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ respecto a la base $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Para ello bastará que sustituyamos las λ_i' de (5) por sus valores dados en (1) y tendremos

$$(6) \quad \begin{cases} \lambda_1'' = \gamma_{11} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}\lambda_i + \gamma_{12} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i}\lambda_i + \ldots + \lambda_{1m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{mi}\lambda_i \\ \lambda_2'' = \gamma_{21} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}\lambda_i + \gamma_{22} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i}\lambda_i + \ldots + \lambda_{2m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{mi}\lambda_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_p'' = \gamma_{p1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}\lambda_i + \gamma_{p2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i}\lambda_i + \ldots + \lambda_{pm} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{mi}\lambda_i \end{cases}$$

De donde, desarrollando primero y agrupando después los términos que llevan el mismo factor λ_i obtenemos

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda_1'' = \left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_{1i}\alpha_{i1}\right)\lambda_1 + \left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_{1i}\alpha_{i2}\right)\lambda_2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_{1i}\alpha_{in}\right)\lambda_n \\ \lambda_2'' = \left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_{2i}\alpha_{i1}\right)\lambda_1 + \left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_{2i}\alpha_{i2}\right)\lambda_2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_{2i}\alpha_{in}\right)\lambda_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_p'' = \left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_{pi}\alpha_{i1}\right)\lambda_1 + \left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_{pi}\alpha_{i2}\right)\lambda_2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_{pi}\alpha_{in}\right)\lambda_n \end{cases}$$

y, por tanto, la matriz de $H \circ F$ respecto a las bases $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$, $\{w_i\}_{1 \leq i \leq p}$ será $\left(\sum_{k=1}^{m} \gamma_{ik}\alpha_{kj}\right)$.

EJEMPLO 1. Sea F: $R^3 \longrightarrow R^2$ el homomorfismo definido por $F[(1, 0, 0)] = (3, 2)$, $F[(0, 1, 0)] = (-2, 4)$ y $F[0, 0, 1)] = (2, 0)$. Sus ecua-

ciones respecto a las bases canónicas en R^3 y R^2 serán:

$$\lambda_1' = 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3$$
$$\lambda_2' = 2\lambda_1 + 4\lambda_2$$

y la matriz correspondiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 2. Sea C_2 el conjunto de los números complejos como espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales y $F: C_2 \longrightarrow C_2$ el endomorfismo definido por $F(1) = 1 + i$, $F(i) = 1 - i$. Las ecuaciones de este endomorfismo respecto a la base $\{1, i\}$ son

$$\lambda_1' = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$\lambda_2' = \lambda_1 - \lambda_2$$

y su matriz, por tanto,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 3. Sea $F: R^3 \longrightarrow R^2$ el endomorfismo dado por

$$F[(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)] = (\alpha_1, \alpha_2, 0)$$

y $G: R^3 \longrightarrow R^3$ el definido por

$$G[(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)] = (0, 0, \alpha_3).$$

Las ecuaciones de uno y otro respecto a las bases canónicas son

$$F \equiv \begin{cases} \lambda_1' = 1 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 \\ \lambda_2' = 0 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 \\ \lambda_3' = 0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 \end{cases}; \qquad G \equiv \begin{cases} \lambda_1' = 0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 \\ \lambda_2' = 0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 \\ \lambda_3' = 0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 \end{cases}$$

Las ecuaciones de la homotecia $H: R^3 \longrightarrow R^3$ tal que

$$H[(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)] = \alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \alpha\alpha_3)$$

son

$$H \equiv \begin{cases} \lambda_1' = \alpha\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 \\ \lambda_2' = 0 \cdot \lambda_1 + \alpha\lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 \\ \lambda_3' = 0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \alpha\lambda_3 \end{cases}$$

las matrices respectivas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de $F+G$ vienen dadas por

$$F+G\equiv\begin{cases}\lambda_1'=\lambda_1\\ \lambda_2'=\quad\lambda_2\\ \lambda_3'=\qquad\lambda_3\end{cases}$$

es decir, $F+G$ es la identidad.

La matriz del endomorfismo $G\circ F$ será

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0&0\cdot0+0\cdot1+0\cdot0&0\cdot0+0\cdot0+0\cdot0\\0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0&0\cdot0+0\cdot1+0\cdot0&0\cdot0+0\cdot0+0\cdot0\\0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0&0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0&0\cdot0+0\cdot0+1\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Luego $G\circ F$ es el endomorfismo cero. Obsérvese que los endomorfismos F y G son divisores de cero del anillo $\mathfrak{E}(R^3)$.

Por último, las ecuaciones de $H\circ F$ son

$$\begin{aligned}\lambda_1'&=\alpha\lambda_1+0\cdot\lambda_2+0\cdot\lambda_3\\ \lambda_2'&=0\cdot\lambda_1+\alpha\lambda_2+0\cdot\lambda_3\\ \lambda_3'&=0\cdot\lambda_1+0\cdot\lambda_2+0\cdot\lambda_3\end{aligned}$$

y, por tanto, $H\circ F=\alpha F$.

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que si dimensión de $V=n$ y dimensión de $V'=m$, dimensión de $\mathfrak{H}(V,V')=nm$.

2. Sea V el espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales constituido por todos los vectores del espacio con origen en un punto fijo. Se elige en él como base la compuesta por tres vectores unitarios ortogonales dos a dos $\{u_1,u_2,u_3\}$. Hállense las ecuaciones respecto a dicha base del endomorfismo F de V definido por:

$$F(u_1)=v_1,\qquad F(u_2)=v_2,\qquad F(u_3)=v_3,$$

siendo

$$|v_1|=3, \quad \cos \widehat{u_1, v_1}=\cos \widehat{u_2, v_1}=\cos \widehat{u_3, v_1}=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$|v_2|=4, \quad \cos \widehat{u_1, v_2}=\cos \widehat{u_2, v_2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=-\cos \widehat{u_3, v_2};$$

$$|v_3|=1, \quad \widehat{u_1, v_3}=\widehat{v_3, u_2}=45^{\circ}.$$

3. Hállese el núcleo del endomorfismo anterior y su dimensión.

4. Dados los homomorfismos F y G de R^3 en R^2 mediante sus ecuaciones respecto a sus bases canónicas,

$$F \equiv \begin{cases} \lambda_1' = 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 \\ \lambda_2' = \lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 \end{cases}; \qquad G \equiv \begin{cases} \lambda_1' = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_2' = 7\lambda_1 + 7\lambda_2 - 6\lambda_3 \end{cases}$$

Hállese el núcleo del homomorfismo $F+G$, la variedad lineal $(F+G)(R^3)$ y sus dimensiones:

5. Sea K el cuerpo de los enteros módulo 5 y F y G los homomorfismos de K^3 en K^2 dados por

$$\begin{array}{l} F[(\bar{3}, \bar{0}, \bar{1})]=(\bar{1}, \bar{1}) \\ F[(\bar{0}, \bar{2}, \bar{2})]=(\bar{0}, \bar{1}) \\ F[(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1})]=(\bar{2}, \bar{1}) \end{array} \quad \text{y} \quad G \equiv \begin{cases} \lambda_1' = \lambda_1 + \lambda_2 + \bar{2}\lambda_3 \\ \lambda_2' = \bar{3}\lambda_1 + \bar{2}\lambda_2 - \bar{4}\lambda_3 \end{cases}$$

y sea H: $K^2 \to K^4$ el homomorfismo definido por

$$\begin{array}{l} H[(\bar{1}, \bar{0})]=(\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}) \\ H[(\bar{1}, \bar{1})]=(\bar{0}, \bar{0}, \bar{2}, \bar{4}) \end{array}$$

Calcúlense las matrices respecto de las bases canónicas de $2F+3G$, de $H \circ F$ y de $H \circ G$.

6. Sea F el endomorfismo del Ej. 2. Hállese la variedad lineal $F(V)$ y su dimensión.

7. Sea V el conjunto de los vectores del plano con origen en un punto fijo O y F el endomorfismo de V, tal que $\widehat{x, F(x)}=30^{\circ}$. Hállese la matriz de dicho endomorfismo respecto a una base $\{u_1, u_2\}$, tal que

$$|u_1|=|u_2|=1 \quad \text{y} \quad \widehat{u_1, u_2}=90^{\circ}.$$

JAR'23

9

matrices

En el presente capítulo vamos a estructurar algebraicamente los conjuntos de matrices de dimensiones $m \times n$ y de matrices cuadradas de orden n sobre un cuerpo K, que para mayor facilidad tomaremos conmutativo. Para ello, definiremos unas ciertas operaciones entre matrices y elementos del cuerpo K y matrices; y estas operaciones las definiremos de tal forma, que el estudio de las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales mediante matrices, sea lo más sencillo posible. Más adelante veremos que las matrices resultan una herramienta poderosa, no sólo en el estudio de dichas aplicaciones lineales, sino también en muchas otras cuestiones.

9.1. Matrices, generalidades y notación.

Se llama *matriz* sobre un cuerpo K, a un conjunto de mn elementos de K dispuestos formando un cuadro de m filas y n columnas. Se suele escribir este cuadro entre paréntesis curvos.

Al número de filas y de columnas se les llama *dimensiones* de la matriz.

Cuando se hace un estudio general con matrices, por lo que sus elementos se denotan con letras, es habitual afectar a éstas de dos subíndices, el primero de los cuales indica el orden de la fila a la cual pertenece el elemento, y el segundo, el orden de la columna. Cuando no es necesario gran detalle, se simbolizan las matrices por letras mayúsculas y, si se quiere poner de manifiesto el tipo de sus elementos, en la forma (α_{ij}) o, si se quiere hacer hincapié también en sus dimensiones se indican éstas de la manera siguiente $(\alpha_{ij})_{m\times n}$. Al elemento α_{ij} se le llama *elemento genérico* de la matriz.

Si una matriz tiene el mismo número de filas que de columnas, se dice que es una *matriz cuadrada,* y al número de filas (o al de columnas) se le llama *orden* de la matriz. A los elementos α_{ii} de una matriz cuadrada se les llama elementos de la *diagonal principal.*

Dos matrices $(\alpha_{ij})_{m\times n}$ y $(\beta_{ij})_{p\times q}$ son *iguales* cuando $m=p$, $n=q$

y $\alpha_{ij}=\beta_{ij}$, con $i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$. Es decir, dos matrices son iguales cuando tienen las mismas dimensiones y sus elementos correspondientes son iguales. La igualdad de dos matrices de dimensiones $m \times n$ equivale a mn igualdades escalares.

EJEMPLO 1. El conjunto de las coordenadas de un vector de un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un cuerpo K, es una matriz sobre K de una fila y n columnas o, ¿por qué no?, de n filas y una columna. Las matrices del primer tipo se denominan *vectores fila* y las del segundo *vectores columna.*

EJEMPLO 2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3+i & 5 & -3 \\ i & \frac{2}{3} & 3 & -i \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz sobre el cuerpo de los números complejos. Sus dimensiones son 3×4.

EJEMPLO 3. La matriz $I_n=(\delta_{ij})$ tal que

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

es una matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal son todos 1 y los restantes 0. Por las razones que veremos más adelante, se le llama *matriz unidad* de orden n. A las δ_{ij} que cumplen las relaciones indicadas más arriba se les llama *deltas de Kronecker.*

EJEMPLO 4.

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix}$$

puede denotar una matriz cuadrada de orden 3 sobre el cuerpo $Z/5Z$.

EJERCICIOS

1. Las matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿son iguales?

2. Las matrices

$$\begin{pmatrix} \bar{3}+x & y-\bar{1} & \bar{2}z \\ \bar{4} & \bar{3}-t & \bar{5}+u \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix}$$

de elementos del cuerpo $Z/7Z$ son iguales. Calcúlense x, y, z, t, u.

3. ¿A qué es igual $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\delta_{jk}$, siendo δ_{jk} las deltas de Kronecker?

9.2. El espacio vectorial de las matrices de dimensiones $m \times n$.

Consideremos el conjunto $\mathfrak{M}_{m\times n}$ de todas las matrices de dimensiones $m \times n$ con elementos de un cuerpo conmutativo K. Según hemos visto en el párrafo anterior, existe una biyección entre $\mathfrak{M}_{m\times n}$ y $\mathfrak{K}(V, V')$, donde V y V' son espacios vectoriales de dimensiones respectivas m y n sobre el cuerpo K. Sean $F, G \in \mathfrak{K}(V, V')$ y (α_{ij}), $(\beta_{ij}) \in \mathfrak{M}_{m\times n}$ sus matrices correspondientes respecto a unas mismas bases.

DEFINICIÓN. Llamaremos *matriz suma* de las matrices correspondientes a los homomorfismos F y G, a la matriz del homomorfismo $F+G$. Es decir,

$$(\alpha_{ij})+(\beta_{ij})=(\alpha_{ij}+\beta_{ij}).$$

De acuerdo con esta definición, para que dos matrices puedan sumarse tienen que tener las mismas dimensiones y entonces la suma es otra matriz, cuyos elementos se obtienen sumando los elementos correspondientes de las matrices dadas.

Por la forma en que se ha definido la adición de matrices, resulta que esta operación tendrá las mismas propiedades que la adición de aplicaciones lineales, es decir,

Si $A, B, C \in \mathfrak{M}_{m\times n}$, se verifica:

I. $A+(B+C)=(A+B)+C$,
II. $A+B=B+A$,
III. Existe una matriz 0 tal que $0+A=A$ para todo $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}$. Esta matriz es, evidentemente, la que tiene todos sus elementos igual a cero.
IV. Para toda $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}$ existe otra matriz $-A \in \mathfrak{M}_{m\times n}$ tal que $A+(-A)=0$. Es fácil comprobar que la opuesta de la matriz A es la que tiene por elementos los opuestos de los correspondientes en A.

En resumen, el conjunto $\mathfrak{M}_{m\times n}$ con esta ley de composición interna es un grupo abeliano.

Sea λ un elemento de K,

DEFINICIÓN. Llamaremos *producto* del escalar λ por la matriz de un homomorfismo F a la matriz del homomorfismo λF. Es decir,

$$\lambda(\alpha_{ij})=(\lambda\alpha_{ij})$$

Por tanto, el producto de un escalar $\lambda \in K$ por una matriz es otra matriz, cuyos elementos se obtienen multiplicando dicho escalar por los elementos correspondientes de la matriz dada.

Es evidente que las propiedades de esta ley de combinación externa serán las mismas que las del producto de un escalar por un homomorfismo, a saber:

Si $A, B \in \mathfrak{M}_{m\times n}$ y $\lambda, \mu \in K$, se tiene:

I'. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$,
II'. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$,
III'. $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$,
IV'. $1A=A$.

Luego, el conjunto $\mathfrak{M}_{m\times n}$ junto con las dos operaciones descritas, es un espacio vectorial sobre el cuerpo K.

La dimensión de este espacio vectorial es mn.

En efecto, llamemos E_{ij} a la matriz cuyo elemento de la fila i y columna j es 1 y los restantes elementos 0. Vamos a comprobar que la familia $\{E_{ij}\}_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ es una base de $\mathfrak{M}_{m\times n}$. En primer lugar, dicha familia es libre, pues si

$$0=\lambda_{11}E_{11}+\lambda_{12}E_{12}+\ldots+\lambda_{ij}E_{ij}+\ldots+\lambda_{mn}E_{mn} \Longrightarrow 0=(\lambda_{ij}) \Longrightarrow \lambda_{ij}=0,$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ m; \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Además, dicho conjunto de matrices es un sistema de generadores, pues

$$(\lambda_{ij})=\sum_{i,j=1}^{m,n}\lambda_{ij}E_{ij}.$$

En resumen, las matrices E_{ij} constituyen una base del espacio vectorial $\mathfrak{M}_{m\times n}$ a la que se llama *base canónica.*

EJEMPLO 1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ 8 & 2 & 7 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 4 & 13 & 8 \\ 12 & 0 & 10 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 2. Los elementos de las siguientes matrices pertenecen al cuerpo $Z/5Z$:

$$3\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Hállense las matrices X e Y que verifican las relaciones siguientes:

$$3X+2Y=\begin{pmatrix} 2-i & 1+2i & 4 \\ i & 7 & -3i \end{pmatrix}$$

$$X-3Y=\begin{pmatrix} -i & 4 & 3+2i \\ 1 & 5i & 6 \end{pmatrix}$$

2. Demuéstrese que las matrices (α_{ij}) tales que

$$\alpha_{ij}=\begin{cases} \lambda & \text{si} \quad i=j \\ 0 & \text{si} \quad i\neq j \end{cases}$$

constituyen una variedad lineal del espacio vectorial $\mathfrak{M}_n$. A este tipo de matrices se les llama *matrices escalares*.

3. Se llama *matriz triangular* a toda matriz cuadrada (α_{ij}), tal que $\alpha_{ij}=0$ si $i>j$. Es decir, la matriz (α_{ij}) es triangular si todos sus elementos situados debajo de la diagonal principal son 0. Demuéstrese que el conjunto de las matrices triangulares de $\mathfrak{M}_n$ es un subespacio vectorial. ¿Qué dimensión tiene este subespacio vectorial?

4. Demuéstrese que el conjunto de las matrices de dimensiones $m\times n$ sobre el cuerpo de los números complejos puede estructurarse como espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales. ¿Qué dimensión tiene este espacio vectorial? Hállese una base del mismo.

5. Calcúlese:

$$(-3)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}+7\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 6 & 7 & 13 \\ 4 & -7 & 5 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

9.3. El anillo de las matrices cuadradas de orden n.

Consideremos ahora el conjunto $\mathfrak{M}_{p\times m}$ de las matrices de dimensiones $p\times m$ sobre el cuerpo conmutativo K. A cada una de estas matrices corresponde un elemento de $\mathfrak{X}(V', V'')$ y recíprocamente, siendo V'' un espacio vectorial de dimensión p sobre K. Supondremos que como base en V' se ha elegido la misma que en los casos

anteriores. Obsérvese que están definidos los productos de elementos de $\mathfrak{H}(V, V')$ por elementos de $\mathfrak{H}(V', V'')$.

DEFINICIÓN. Llamaremos matriz *producto* de la matriz del homomorfismo $H \in \mathfrak{H}(V', V'')$ por la matriz del homomorfismo $F \in \in \mathfrak{H}(V, V')$, a la matriz del homomorfismo $H \circ F \in (V, V'')$. Es decir:

$$(\beta_{ij})_{p\times m}\cdot(\alpha_{ij})_{m\times n}=\left(\sum_{k=1}^{m}\beta_{ik}\alpha_{kj}\right)_{p\times n}.$$

Por tanto, para multiplicar dos matrices es necesario que la primera tenga tantas columnas como filas la segunda, y entonces, el producto de ambas es otra matriz que tiene tantas filas como la primera y tantas columnas como la segunda, y cuyo elemento de subíndices i, j se obtiene multiplicando los elementos de la fila de orden i de la primera matriz por los correspondientes de la columna de orden j de la segunda y sumando estos productos.

Este producto, en general, no es conmutativo. En efecto, el producto AB puede estar definido y no estarlo el BA, por ejemplo, si A es de dimensiones $m \times n$ y B de dimensiones $n \times p$ con $m \neq p$. Pero aún estando definido el producto BA, tampoco es necesariamente igual al AB, pues si las dimensiones de B fueran $n \times m$, las de AB serían $m \times n$ y las de BA $n \times n$. Si las matrices A y B son cuadradas, están definidos los dos productos, y ambos son del mismo orden que A o B, pero ni siquiera en este caso está garantizada la conmutatividad, como lo demuestra el siguiente ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix}13 & -6\\ 19 & -12\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 18 & -2\end{pmatrix}.$$

Naturalmente que el no ser conmutativo el producto de matrices es consecuencia inmediata de no serlo el producto de aplicaciones lineales, por la forma en que se ha definido dicho primer producto.

También son consecuencia de lo mismo las siguientes propiedades:

II''. $A_{m\times n}(B_{n\times p}C_{p\times q})=(A_{m\times n}B_{n\times p})C_{p\times q}$,
II''. $A_{m\times n}(B_{n\times p}+D_{n\times p})=A_{m\times n}B_{n\times p}+A_{m\times n}D_{n\times p}$,
III''. $(B_{n\times p}+D_{n\times p})M_{p\times q}=B_{n\times p}M_{p\times q}+D_{n\times p}+M_{p\times q}$.

Obsérvese que los factores de este producto matricial pertenecen a conjuntos distintos, los $\mathfrak{M}_{p\times m}$ y $\mathfrak{M}_{m\times n}$, y el resultado a un tercer

conjunto, el $\mathfrak{M}_{p\times n}$. Naturalmente, salvo el caso en que $m=n=p$. Este es justamente el caso que consideraremos de ahora en adelante.

El conjunto de las matrices cuadradas de orden n, al que denotamos por $\mathfrak{M}_n$, es estable respecto al producto de matrices; luego, teniendo en cuenta las propiedades I a IV de [9.2] y las I″, II″ y III″ de este párrafo, resulta que

El conjunto de las matrices cuadradas de orden n *sobre un cuerpo* K *es un anillo.*

Este anillo es unitario. La matriz $I_n=(\delta_{ij})$ con $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad i=j\\ 0 & \text{si} \quad i\neq j\end{cases}$ hace el papel de elemento unidad. En efecto,

$$(\alpha_{ij})(\delta_{ij})=\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\delta_{kj}\right)=(\alpha_{ij})$$

$$(\delta_{ij})(\alpha_{ij})=\left(\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}\alpha_{kj}\right)=(\alpha_{ij})$$

de acuerdo con lo que se ha visto en el Ej. 3 de [9.1].

Si tenemos en cuenta las propiedades I a IV y I′ a IV′ de [9.2], las I″ a III″ de este párrafo y que

$$\lambda[(\alpha_{ij})(\beta_{ij})]=[\lambda(\alpha_{ij})](\beta_{ij})=(\alpha_{ij})[\lambda(\beta_{ij})]$$

resulta que

El conjunto $\mathfrak{M}_n$ *de las matrices cuadradas de orden* n *sobre un cuerpo conmutativo* K *es un álgebra sobre* K.

EJEMPLO 1.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3+i & -i\\ 1+i & -1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}0 & 2+i\\ 2 & 3i\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow AB=\begin{pmatrix}10-2i & 10+3i\\ -3+i & 3i\end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 2.

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

Luego, el anillo $\mathfrak{M}_n$ tiene divisores de 0.

EJEMPLO 3. Si

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n} \quad \text{y} \quad B=(\lambda_i)_{n\times 1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow AB=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11}\lambda_1+\alpha_{12}\lambda_2+\dots+\alpha_{1n}\lambda_n \\ \alpha_{21}\lambda_1+\alpha_{22}\lambda_2+\dots+\alpha_{2n}\lambda_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}\lambda_1+\alpha_{m2}\lambda_2+\dots+\alpha_{mn}\lambda_n \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 4. Sean A y B matrices cuadradas tales que los elementos que no figuran en la diagonal principal son nulos. Se les llama *matrices diagonales*:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow AB=BA=\begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & & \\ & \lambda_2\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que las matrices E_{ij} de la base canónica de $\mathfrak{M}_{m\times n}$ verifican las relaciones:

$$E_{pq}E_{rs}=\begin{cases} E_{ps} & \text{si} \quad q=r \\ 0 & \text{si} \quad q\neq r. \end{cases}$$

2. En el anillo de las matrices cuadradas de orden n, ¿son ciertas, en general, las relaciones:

$a)$ $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$,

$b)$ $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$,

$c)$ $AX=AY \Longrightarrow X=Y$,
$XA=YA \Longrightarrow X=Y$?

3. Calcúlese el siguiente producto matricial:

$$\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{5} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{6} \end{pmatrix}$$

Se supone que los elementos de ambas matrices pertenecen al cuerpo $Z/7Z$.

4. Demuéstrese que la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ verifica la relación:

$$A^2-5A+8I_2=0.$$

5. Calcúlese:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

6. Hállense todas las matrices cuadradas de segundo orden A, sobre el cuerpo de los números reales, tales que $A^2=A$.

9.4. Producto por bloques.

A veces, puede resultar útil multiplicar matrices empleando un método llamado *producto por bloques*, método que pasamos a describir.

Para no hacer demasiado farragosa esta descripción, utilizaremos dos matrices A y B de dimensiones concretas (3×4 y 4×2, respectivamente), aunque el lector puede comprobar que los razonamientos en el caso general seguirían las mismas líneas que en este caso particular.

Mediante líneas de puntos descompondremos A y B en submatrices de la siguiente forma:

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right), \qquad B=\left(\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \hdashline b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{array}\right)$$

Llamemos A_{11} a la submatriz $(a_{11}\ a_{12})$, A_{12} a la $(a_{13}\ a_{14})$, A_{21} a la $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$, A_{22} a la $\begin{pmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$, B_{11} a la $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ y B_{21} a la $\begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$ con lo que las matrices A y B pueden escribirse en la forma

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix}.$$

Deseamos que estas matrices, cuyos elementos son a su vez matrices, puedan multiplicarse por el mismo procedimiento que las matrices corrientes, y éste ha sido el motivo por el que hemos hecho la descomposición por filas en la matriz B, de la misma forma que la descomposciión por columnas en A.

Pongamos

$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{pmatrix}$$

Vamos a comprobar que las matrices C_{11} y C_{21} son las mismas que se obtendrían en la descomposición de la matriz AB, por filas de la misma forma que se hizo con A y por columnas lo mismo que B.

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + a_{24}b_{42} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} + a_{34}b_{41} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{4} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, el elemento c_{12} de la matriz C_{21} se obtiene como suma de los elementos de la fila primera y columna segunda de las matrices $A_{21}B_{11}$ y $A_{22}B_{21}$, y éstos son, a su vez, sumas de productos de elementos de la fila primera de A_{21} (ó A_{22}) por los correspondientes de la columna segunda de B_{11} (ó B_{21}):

$$(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) + (a_{23}b_{32} + a_{24}b_{42})$$

que es el mismo elemento que aparecería en el lugar indicado en la descomposición de AB. Podemos, por tanto, poner

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS

1. Multiplíquense por bloques las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 5 & 7 \\ 5 & -2 & -6 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 7 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

9.5. Matrices inversibles.

Si en una matriz de dimensiones $m \times n$ tachamos los elementos de $m-p$ filas y $n-q$ columnas ($p < m$, $q < n$), obtenemos una matriz de dimensiones $p \times q$, a la que se llama *submatriz* de la matriz dada. Por ejemplo, si en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 & -6 \\ 4 & 0 & 10 & 7 & 5 \\ 7 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

tachamos las filas primera y cuarta y la columna tercera, obtenemos la submatriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 \\ 7 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si tachamos todas las filas de una matriz excepto una, obtenemos una matriz de una sola fila, es decir, lo que anteriormente habíamos llamado un vector fila. De manera análoga se obtendrían los vectores columna.

EJEMPLO. Los vectores fila de A son:

$$(3\ 2\ 1\ 5\ -6),\quad (4\ 0\ 10\ 7\ 5),\quad (7\ 2\ -1\ 4\ 3)\quad \text{y}\quad (2\ -2\ 3\ 5\ 6)$$

y los vectores columna:

$$(3\ 4\ 7\ 2),\quad (2\ 0\ 2\ -2),\quad (1\ 10\ -1\ 3),\quad (5\ 7\ 4\ 5),\quad (-6\ 5\ 3\ 6).$$

Obsérvese que los vectores fila de una matriz de dimensiones $m \times n$ sobre un cuerpo K, pueden considerarse como vectores (dados por sus coordenadas respecto a una cierta base) de un espacio vectorial de dimensión n sobre K. De manera análoga, los vectores columna pueden considerarse como vectores de un espacio vectorial de dimensión m.

Hemos dicho varias veces que las matrices resultan muy adecuadas para el estudio de las aplicaciones lineales entre espacios vectorales. Por lo pronto, su utilización proporciona un gran ahorro en la escritura. En efecto, las ecuaciones (1) pueden escribirse en la forma matricial siguiente:

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \lambda'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

lo que es consecuencia inmediata de las definiciones de producto e igualdad de matrices. Todavía se puede abreviar más, escribiendo simplemente.

$$(\lambda_i')_{m\times 1}=(\alpha_{ij})_{m\times n}(\lambda_i)_{n\times 1}.$$

Esto es lo que se denomina expresión matricial de una aplicación lineal.

Llamaremos *rango* de una matriz al rango de sus vectores columna. Más adelante comprobaremos que coincide con el rango de sus vectores fila y daremos un método práctico para calcular dicho rango.

Consideremos ahora un endomorfismo F de un espacio vectorial V de dimensión n y supongamos que las ecuaciones de dicho endomorfismo F respecto a una determinada base son:

$$(8)\qquad \begin{cases} \lambda_1' = \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{1n}\lambda_n \\ \lambda_2' = \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{2n}\lambda_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_n' = \alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{nn}\lambda_n \end{cases}$$

La expresión matricial correspondiente será:

$$(\lambda_i')_{n\times 1}=(\alpha_{ij})_{n\times n}(\lambda_i)_{n\times 1}.$$

Si llamamos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a los vectores columna de la matriz (α_{ij}) y c al vector de coordenadas $(\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n')$ las n ecuaciones escalares (8) equivalen a la igualdad vectorial

$$c=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_n v_n.$$

Tratemos de resolver el siguiente problema: dado el vector $c\in V$ hállense los vectores $x\in V$, tales que $F(x)=c$.

Pueden ocurrir los siguientes casos:

1.º Que los vectores $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ sean linealmente independientes. De acuerdo con el teorema 1 de [8.1], F es una aplicación inyectiva. Pero, por ser n la dimensión de V, resulta que los v_i constituyen una base de V, luego son un sistema de generadores, por lo que, en virtud del teorema citado, F es una aplicación sobreyectiva.

De manera análoga se puede razonar que si F es sobreyectiva es inyectiva.

Es decir, para que un endomorfismo de un espacio vectorial V sea un automorfismo es suficiente con que sea inyectivo, o bien sobreyectivo.

En resumen, en este caso nuestro problema posee una única solución.

2.° Que los vectores sean linealmente dependientes. Se presentan dos subcasos:

a) que el vector c no pertenezca a la variedad lineal engendrada por la familia $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$. En este caso, c no se puede expresar como combinación lineal de los vectores v_i y nuestro problema no tiene solución;

b) que el vector c pertenezca a la citada variedad lineal. Entonces el problema admite solución, puesto que c puede expresarse como combinación lineal de las v_i.

$$c=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_n v_n. \tag{9}$$

Veamos que en este caso existe más de una solución. En efecto, por ser $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ una familia ligada, existen n escalares $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, no todos nulos, tales que

$$0=\mu_1 v_1+\mu_2 v_2+\ldots+\mu_n v_n. \tag{10}$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (9) y (10), obtenemos

$$c=(\lambda_1+\mu_1)v_1+(\lambda_2+\mu_2)v_2+\ldots+(\lambda_n+\mu_n)v_n$$

lo que nos dice que los escalares $\lambda_i+\mu_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, son también solución del problema.

Volvamos al primer caso: cuando el problema tenía solución única. En ese caso F resultaba ser un automorfismo, es decir, un endomorfismo biyectivo. Existe entonces la aplicación inversa F^{-1}, tal que $F[(F^{-1})(x)]=x$, $F^{-1}[(F)(x)]=x$, es decir, tal que $F\circ F^{-1}=F^{-1}\circ F=$a la aplicación idéntica. Vamos a comprobar que la aplicación F^{-1} es también lineal. En efecto,

1. $$F^{-1}(x+y)=F^{-1}[F(x_1)+F(y_1)]=F^{-1}[F(x_1+y_1)]=$$
$$=x_1+y_1=F^{-1}(x)+F^{-1}(y),$$

2. $$F^{-1}(\lambda x)=F^{-1}[\lambda F(x_1)]=F^{-1}[F(\lambda x_1)]=\lambda x_1=\lambda F^{-1}(x).$$

Luego, si llamamos A a la matriz del automorfismo F y B a la de F^{-1}, y si recordamos que la matriz de la aplicación idéntica es la I_n, tenemos las igualdades

$$AB=BA=I_n, \tag{11}$$

lo que nos dice que las matrices A y B son inversibles. Además, la

matriz B que cumple las condiciones (11), es única. En efecto, supongamos que la matriz C es tal que $AC=CA=I_n$; multipliquemos por la izquierda los miembros primero y tercero de la iguadad (11) por la matriz C y obtendremos

$$C(AB)=(CA)B=I_nB=B=CI_n=C$$

luego, $C=B$. A la matriz B que cumple las condiciones (11) se le llama *matriz inversa* de la A y se representa por A^{-1}.

Si la matriz A es inversible, entonces existe A^{-1} tal que

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$$

luego, el endomorfismo producto de los endomorfismos caracterizados por las matrices A y A^{-1} es la aplicación idéntica y, por tanto, dichos endomorfismos serían biyectivos, es decir, serían automorfismos.

Resumiendo, *existe una biyección entre el conjunto* $\mathcal{GL}$ (V) *de los automorfismos del espacio vectorial* V *de dimensión* n *sobre un cuerpo conmutativo* K *y el conjunto de las matrices cuadradas inversibles de orden* n *sobre* K.

Hemos demostrado también que *el rango de una matriz inversible de orden* n *es* n.

EJERCICIOS

1. Dada una ley de composición interna $*$ sobre un conjunto A, el elemento $a \in A$ se llama *regular* si:

$$a*x=a*y \Longrightarrow x=y$$
$$x*a=y*a \Longrightarrow x=y.$$

Demuéstrese que en el anillo $\mathfrak{M}_n$ todo elemento inversible es regular, y viceversa. ¿Es cierta esta afirmación para un anillo cualquiera?, ¿y si el anillo es unitario?

2. El conjunto de las matrices regulares de $\mathfrak{M}_n$ es un grupo respecto a la multiplicación. ¿Se puede afirmar que es un cuerpo respecto a la adición y a la multiplicación?

3. Utilizando únicamente los conocimientos que se poseen hasta el momento presente, hállese la matriz inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

4. En las mismas condiciones del problema anterior, ¿es inversible la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} ?$$

5. Sabiendo que la inversa de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{es la} \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{21} & \frac{-1}{21} \\ \frac{2}{3} & \frac{-11}{21} & \frac{10}{21} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

y que

$$\begin{aligned} 3 &= 3x + z \\ -5 &= 2x - y + 4z \\ 0 &= -2x + y + 3z \end{aligned}$$

calcúlense x, y, z.

6. Demuéstrese que si una matriz cuadrada A verifica una relación de la forma

$$a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0,$$

siendo I la matriz unidad del orden correspondiente y $a_0 \neq 0$, dicha matriz A es regular. Hállese su inversa.

9.6. Matrices transpuestas.

Dada una matriz

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se llama *transpuesta* de A a otra matriz

$$A'=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1m} \\ a'_{21} & a'_{22} & \ldots & a'_{2m} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \ldots & a'_{nm} \end{pmatrix}$$

tal que $a_{ij}' = a_{ji}$. Es decir, que la transpuesta de A se obtiene a partir de A cambiando las filas por las columnas.

EJEMPLO. Si

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow A'=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 0 \\ -1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Propiedades:

1. Si A es de dimensiones $m \times n$, su transpuesta A' es de dimensiones $n \times m$,
2. $(A')' = A$,
3. $(A + B)' = A' + B'$,
4. $(\lambda A)' = \lambda A'$,
5. $(AB)' = B'A'$,
6. $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.

Nos limitaremos a demostrar la propiedad 5.

$$A = (\alpha_{ij}), \qquad A' = (\alpha'_{ij}), \qquad \alpha'_{ij} = \alpha_{ji}$$
$$B = (\beta_{ij}), \qquad B' = (\beta'_{ij}), \qquad \beta'_{ij} = \beta_{ji}$$
$$AB = (\gamma_{ij}), \qquad (AB)' = (\gamma'_{ij}), \qquad \gamma'_{ij} = \gamma_{ji}$$
$$(AB)' = [(\alpha_{ij})(\beta_{ij})]' = (\gamma_{ij})' = (\Sigma\, \alpha_{ik}\beta_{kj})' = (\gamma'_{ij}) = (\gamma_{ji}) =$$
$$= (\Sigma\, \alpha_{jk}\beta_{ki}) = (\Sigma\, \beta'_{ik}\alpha'_{kj}) = (\beta'_{ij})(\alpha'_{ij}) = B'A'.$$

Se dice que una matriz es *simétrica* cuando es igual a su transpuesta

$$A = A'.$$

En virtud de la propiedad 1, para que una matriz sea simétrica es necesario que sea cuadrada.

Si una matriz es simétrica sus elementos simétricos respecto a la diagonal principal son iguales

Se dice que una matriz es *hemisimétrica* cuando es igual a la opuesta de su transpuesta

$$A = -A'.$$

Lo mismo que antes, para que una matriz sea hemisimétrica es necesario que sea cuadrada.

Si una matriz es hemisimétrica, los elementos simétricos respecto a la diagonal principal son opuestos y, por tanto, los elementos de la diagonal principal tienen que ser todos 0.

EJERCICIOS

1. Sea A una matriz cuadrada arbitraria de orden n. Pruébese que $A + A'$ es una matriz simétrica y $A - A'$ es hemisimétrica. Aplíquese este resultado para descomponer la matriz A en suma de dos matrices, una simétrica y la otra hemisimétrica. Aplíquese el caso

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

2. Sea A una matriz cuadrada de orden n, demuéstrese que las relaciones son equivalentes:

$$AA' = A'A = I,$$

y que el conjunto de las matrices que cumplen dichas relaciones es estable respecto a la multiplicación y a la operación de tomar inversa.

A las matrices A que cumplen las relaciones anteriores se les llama matrices *ortogonales*. Es decir, que una matriz cuadrada A es ortogonal cuando su inversa coincide con su transpuesta.

3. Hállense todas las matrices ortogonales de segundo orden sobre el cuerpo de los números reales.

1787
Amparo
JAR'23

10

determinantes

En los capítulos anteriores hemos estudiado los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores, rango de un conjunto de vectores y rango de una matriz, matriz regular, matriz inversa de una matriz regular, etc. Pero lo cierto es que, hasta este momento, carecemos de criterios prácticos que nos permitan decidir si una familia finita de vectores es libre o ligada, lo que nos conduciría a la determinación de su rango o, lo que es análogo al cálculo del rango de una matriz. También carecemos de elementos de juicio suficientes para saber cuándo una matriz es regular y, en caso de serlo, no poseemos métodos para el cálculo de su inversa.

El concepto de determinante, motivo del presente capítulo, nos va a proporcionar, de una manera sencilla y elegante, la clave de todos estos problemas y, como veremos más adelante, de muchos otros más.

10.1. Aplicaciones multilineales.

Dados $p+1$ espacios vectoriales $V_1, V_2, \ldots, V_p, V$ sobre un mismo cuerpo conmutativo K, se llama *aplicación* p-*lineal* a toda aplicación $F: V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_p \longrightarrow V$, tal que

1. $F(v_1, v_2, \ldots, v_i' + v_i'', \ldots, v_p) = F(v_1, v_2, \ldots, v_i', \ldots, v_p) + F(v_1, v_2, \ldots, v_i'', \ldots, v_p)$,

2. $F(v_1, v_2, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_p) = \lambda F(v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_p)$

para todo $i = 1, 2, \ldots, p$.

Cuando la aplicación F de $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_p$ es en K, considerado como espacio vectorial de dimensión 1 sobre sí mismo, se dice *forma* p-*lineal* en lugar de aplicación p-lineal.

EJEMPLO 1. El producto escalar de vectores es una forma bilineal.

EJEMPLO 2. El producto vectorial de vectores del espacio es una aplicación bilineal.

Se dice que una aplicación p-lineal de $V \times V \times \overset{(p}{\ldots} \times V = V^p$ en V' es simétrica si $F(v_1, v_2, \ldots, v_p) = F(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_p})$, siendo $i_1, i_2, \ldots, i_p$ una permutación cualquiera de los números 1, 2, ..., p.

Se dice que una aplicación p-lineal de V^p en V' es *alternada* (o *antisimétrica*), si

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_p) = -F(v_1, v_2, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_p).$$

10.2. Determinantes, definición y propiedades.

Tratamos de definir una aplicación del conjunto de las matrices cuadradas de cualquier orden, con elementos de un cuerpo conmutativo K, en dicho cuerpo K. Para ello, vamos a considerar el espacio vectorial V de dimensión n sobre K y una forma n-lineal alternada F de V^n en K. Antes de demostrar la existencia de dicha forma alternada, estudiaremos las propiedades de la misma, consecuencia inmediata de su definición. Estas son:

a)

$$F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = F(v_1, \ldots, v_i + 0, \ldots, v_n) = F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \\ + F(v_1, \ldots, 0, \ldots, v_n),$$

en virtud de la propiedad definidora 1, luego

$$F(v_1, \ldots, 0, \ldots, v_n) = 0.$$

b) Si

$$v_i = v_j \Longrightarrow F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -F(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0.$$

c)

$$F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_n) = \lambda F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = \lambda 0 = 0,$$

como consecuencia de la propiedad anterior.

d)

$$F\left(v_1, \ldots, \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k \overset{i}{\smile} v_k, \ldots, v_n\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} F(v_1, \ldots, \lambda_k \overset{i}{\smile} v_k, \ldots, v_n) = 0,$$

en virtud de la propiedad *c)*.

e) $F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$ no varía si se le suma a v_i una combinación lineal de los restantes, $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k v_k$. Es consecuencia de 1 y *d)*.

Sea $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base del espacio vectorial V. Todo vector v_j del mismo admite una expresión única como combinación lineal de los elementos de esta base:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i ,$$

entonces

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_n) = F\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i1} u_i, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i2} u_i, \ \ldots, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} u_i \right)$$

y si aplicamos repetidamente las propiedades 1 y 2, obtenemos

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2}, \ldots, \alpha_{i_n n} F(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}),$$

donde la sumatoria está extendida a todas las variaciones con repetición de orden n, $i_1, i_2, \ldots, i_n$, de los números 1, 2, ..., n. Ahora bien, todos los términos de la sumatoria en los que aparecen dos elementos u_{i_r} y u_{i_s} de la base, iguales ($i_s = i_s$), son nulos, de acuerdo con la propiedad *b)*. Luego, eventualmente, los únicos términos de la sumatoria distintos de cero, son los que tienen todas las u_i distintas. En resumen, prescindiendo de términos seguramente nulos, la sumatoria estará extendida a todas las variaciones de orden n, $i_1, i_2, \ldots, i_n$, de los números 1, 2, ..., n, o lo que es lo mismo, a las $n!$ permutaciones de dichos números.,

Por otra parte, como consecuencia de ser la forma n-lineal F alternada, tenemos que

$$F(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}) = (-1)^{\sigma} F(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

donde σ indica el número de inversiones de la permutación $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

Por tanto, nuestra forma n-lineal alternada, si existe, tiene que verificar la relación

$$F(v_1, \ldots, v_n) = \left\{ \sum (-1)^{\sigma} \alpha_{i_1 1}, \alpha_{i_2 2}, \ldots, \alpha_{i_n n} \right\} F(u_1, u_2, \ldots, u_n), \tag{12}$$

donde la sumatoria está extendida a todas las permutaciones i_1,

$i_2, \ldots, i_n$ de los n primeros números naturales, y teniendo σ la significación indicada más arriba.

Así, pues, bastará que se elija el valor de F en los elementos $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de una base de V, para que la forma n-lineal alternada F esté perfectamente determinada.

A la expresión

$$\sum (-1)^{\sigma} \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \ldots \alpha_{i_n n}$$

que sólo depende de los elementos de la matriz (α_{ij}), se le llama *determinante* de dicha matriz cuadrada. También se le suele llamar *determinante de los vectores* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *respecto a la base* $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

De acuerdo con la definición anterior, el determinante de una matriz cuadrada de orden n sobre un cuerpo conmutativo K, es el elemento de K que se obtiene sumando todos los productos de n elementos de la matriz tales que, en cada producto aparezca un solo término de cada fila y uno de cada columna, ordenados de acuerdo con los segundos subíndices y precedidos del signo más o del signo menos, según que el número de inversiones de la permutación formada por sus primeros subíndices sea par o impar.

Al determinante de la matriz cuadrada A se le denota por el símbolo $|A|$.

Con esta notación (12) se escribiría

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_n) = |A| F(u_1, u_2, \ldots, u_n), \tag{13}$$

siendo A la matriz que tiene por columnas las coordenadas, respecto a la base $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$, de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Hemos obtenido, pues, la aplicación que buscábamos. A continuación pasamos a estudiar las propiedades de esta aplicación.

1. *El determinante de una matriz y el de su transpuesta son iguales.*

En efecto, sea $A = (\alpha_{ij})$ y $A' = (\alpha'_{ij})$ su transpuesta, luego $\alpha'_{ij} = \alpha_{ji}$. Entonces

$$\alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \ldots \alpha_{i_n n} = \alpha'_{1 i_1} \alpha'_{2 i_2} \ldots \alpha'_{n i_n}.$$

Permutemos los factores del segundo miembro, de forma que los

índices que indican columna se encuentren colocados en el orden natural, con lo cual dicho producto quedaría en la forma

$$\alpha'_{j_1 1}\alpha'_{j_2 2}\ldots\alpha'_{j_n n}.$$

Pero este producto es, salvo el signo, un término del desarrollo de $|A'|$. Ahora bien, las sustituciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \ldots & j_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

son la misma sustitución. Se puede demostrar que, en este caso, el número de inversiones de las permutaciones $i_1\ i_2\ \ldots\ i_n$ y $j_1\ j_2\ \ldots\ j_n$ son de la misma paridad. Luego, los términos $(-1)^\sigma \alpha_{i_1 1}\alpha_{i_2 2}\ldots\alpha_{i_n n}$ y $(-1)^\tau \alpha'_{j_1 1}\alpha'_{j_2 2}\ldots\alpha'_{j_n n}$ de $|A|$ y $|A'|$, respectivamente, no sólo se componen de los mismos factores, sino que coinciden en signo, con lo que la afirmación hecha más arriba queda totalmente justificada.

Como consecuencia de esta propiedad, el desarrollo del determinante de A puede escribirse también de la siguiente forma:

$$|A| = \sum (-1)^\sigma \alpha_{1 i_1}\alpha_{2 i_2}\ldots\alpha_{n i_n}$$

donde la sumatoria está extendida a todas las permutaciones $i_1\ i_2\ \ldots\ i_n$ de los n primeros números naturales y σ indica el número de inversiones de dicha permutación.

De ahora en adelante, emplearemos la palabra *línea* para indicar indistintamente fila o columna.

2. *Si una matriz* A *tiene una línea cuyos elementos son cada uno suma de dos términos, el determinante de* A *es igual a la suma de los determinantes de dos matrices que tienen las restantes líneas iguales a las de* A, *y la primera tiene dicha línea constituida por los primeros sumandos y la segunda los segundos sumandos.*

3. *Si todos los elementos de una línea de una matriz* A *se multiplican por un mismo escalar* λ, *el determinante de dicha matriz queda multiplicado por* λ.

Las dos propiedades anteriores son consecuencia de que la función $|A|$ puede considerarse como una forma n-lineal alternada, actuando sobre sus n vectores fila (columna), como vectores del espacio vectorial K^n; habiéndose tomado como valor de dicha forma sobre los vectores de la base canónica, la unidad.

4. *Si en una matriz* A *se cambian entre sí dos líneas paralelas, el determinante de la nueva matriz es el opuesto del determinante de la primera.*

Esta propiedad es consecuencia inmediata del carácter alternado de la forma n-lineal $|A|$.

5. *Si una matriz tiene todos los elementos de una línea iguales a* 0, *su determinante vale* 0.

6. *Si dos líneas paralelas de una matriz son iguales, el determinante de dicha matriz vale* 0.

7. *Si una línea de una matriz es proporcional a una paralela a ella, el determinante de dicha matriz vale* 0.

9. *El determinante de una matriz no varía si se le suma a una línea una combinación lineal de las restantes líneas paralelas.*

Las propiedades 5 a 9 son traducción directa de las propiedades *a)* a *e)* de las formas n-lineales alternadas.

EJERCICIOS

1. La forma trilineal alternada $F\colon (R^3)^3 \longrightarrow R$ está caracterizada por tomar el valor 4 sobre los elementos de la base canónica. Calcúlese el valor de dicha forma sobre los vectores

$$\begin{aligned} v_1 &= 3u_1 + u_2 - 2u_3 \\ v_2 &= u_1 - u_2 \\ v_3 &= -u_1 + 4u_2 + u_3, \end{aligned}$$

siendo $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base de R^3, caracterizada por que las coordenadas de sus elementos respecto a la base canónica son $(3, 0, 1)$, $(2, -1, 4)$ y $(1, -1, 1)$, respectivamente.

2. Demuéstrese sin desarrollar que el determinante

$$\begin{vmatrix} x+y & x-y & -x+5y \\ x-z & y+z & 2x-3y-5z \\ 2x+z & 3x+2z & -5x-4z \end{vmatrix}$$

vale 0.

3. Se llaman transformaciones elementales de una matriz a las siguientes:

a) cambiar, entre sí, dos líneas paralelas;
b) multiplicar todos los elementos de una línea por un escalar, y
c) sumar a una línea una paralela a ella.

Transfórmese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

mediante transformaciones elementales, en otra matriz B que tenga el elemento a_{23} de A en la primera fila, primera columna, y los restantes elementos de esta columna nulos. ¿Cómo están relacionados $|A|$ y $|B|$?

10.3. Cálculo del determinante de una matriz. Desarrollo por los elementos de una línea.

El determinante de una matriz cuadrada A de orden n es, por definición:

$$A = \sum (-1)^{\sigma} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

donde la sumatoria está extendida a todas las permutaciones $i_1\ i_2 \dots i_n$ de los números 1, 2, 3, ..., n y σ es el número de inversiones de dicha permutación.

Para $n=2$, dichas permutaciones son:

$$\begin{array}{llll} 1 & 2, & \text{número de inversiones:} & 0, \\ 2 & 1, & \text{" \quad " \quad "} & 1, \end{array}$$

luego

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

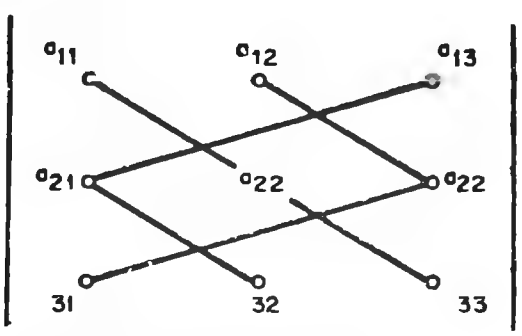
Si $n=3$, las $3!=6$ permutaciones de 1, 2, 3 serían:

$$\begin{array}{lllll} 1 & 2 & 3 & \text{número de inversiones:} & 0, \\ 1 & 3 & 2 & \text{" \quad " \quad "} & 1, \\ 2 & 1 & 3 & \text{" \quad " \quad "} & 1, \\ 2 & 3 & 1 & \text{" \quad " \quad "} & 2, \\ 3 & 1 & 2 & \text{" \quad " \quad "} & 2, \\ 3 & 2 & 1 & \text{" \quad " \quad "} & 3 \end{array}$$

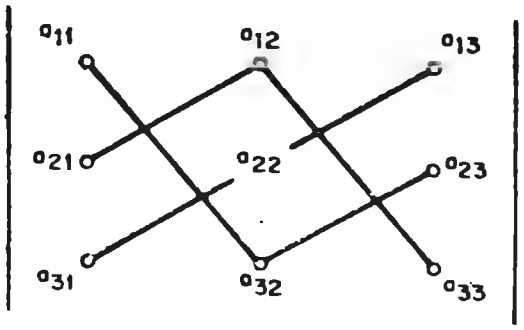
y, por tanto,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

El siguiente esquema, llamado *regla de Sarrus*, sirve de regla nemotécnica:



términos con signo +



términos con signo −

Para calcular determinantes de matrices de orden superior a 3, conviene utilizar el método que vamos a deducir a continuación, que reduce dicho cálculo al de determinantes de matrices de orden $n-1$.

Agrupemos los términos del desarrollo del determinante de una matriz cuadrada de orden n, A, de la siguiente manera: primero, términos en los que aparece el elemento a_{1j}; segundo, términos en los que aparece el elemento a_{2j}; ..., y, por último, términos en los que aparece a_{nj}. Evidentemente, esta agrupación de términos constituye una partición del conjunto de todos los términos del determinante, es decir, cada término pertenece a uno y sólo a uno de dichos grupos. Esto es consecuencia de que en cada término de un determinante interviene un solo elemento de cada fila y uno de cada columna. Podemos, por tanto, escribir:

$$A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj},$$

en donde el símbolo A_{ij} indica la expresión resultante de sacar factor común a_{ij} en la suma algebraica de todos los términos que contienen dicho elemento. A continuación trataremos de caracterizar estas expresiones simbolizadas por A_{ij}.

Empecemos por A_{11}. Afirmamos que A_{11} *es el determinante de la submatriz de orden* n − 1 *que resulta al tachar en* A *la fila y columna primeras.* En efecto, todo producto de la forma $a_{2j_2}a_{3j_3}\ldots a_{nj_n}$, donde $j_2\ j_3\ \ldots\ j_n$ es una permutación cualquiera de los números 2, 3, ..., n, pertenece, salvo el signo, tanto a A_{11} como a

$$\begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

En A_{11}, dicho producto iría precedido del factor $(-1)^{\sigma}$ y en el determinante de la submatriz por el factor $(-1)^{\tau}$, donde σ y τ indican el número de inversiones de las permutaciones $1\ j_2\ \ldots\ j_n$ y $j_2\ j_3\ \ldots\ j_n$, respectivamente. Ahora bien, la primera permutación se deduce de la segunda colocando el número 1 delante de ella, y como en esta posición dicho número no forma inversión con los 2, 3, ..., n, resulta que $\sigma = \tau$, luego todo término (con su signo) de A_{11} lo es también del determinante de la submatriz citada y recíprocamente, con lo que queda demostrada nuestra afirmación.

Pasemos al caso general. Afirmamos ahora que A_{ij} *es igual al determinante de la submatriz que resulta al tachar en* A *la fila de orden* i *y la columna de orden* j, *multiplicado por* $(-1)^{i+j}$. Transformemos la matriz A en otra B, llevando el elemento a_{ij} al primer lugar de la primera fila, para lo cual, hemos de transponer la fila

de orden i con las $i-1$ anteriores y la columna de orden j con las $j-1$ anteriores. Tendremos que

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = (-1)^{i+j-2}|B| = \\ = (-1)^{i+j}|B| = (-1)^{i+j}(a_{ij}B_{11} + \ldots).$$

Pero por la forma en que se ha deducido B a partir de A, resulta que $A_{ij} = (-1)^{i+j}B_{11}$ y, por lo que se vio en el caso anterior:

$$B_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A la expresión A_{ij} se le llama *adjunto* del elemento a_{ij} y al determinante de la submatriz que resulta al tachar en A la fila y columna que se cruzan en dicho elemento a_{ij}, se le llama *menor complementario* de a_{ij}. Nosotros lo representaremos por Δ_{ij}. Con esta notación los resultados anteriores se resumen en la igualdad

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

A la expresión

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij} = |A|$$

se le llama desarrollo del determinante de la matriz A por los elementos de la columna de orden j. De manera análoga se podría haber obtenido el desarrollo

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}$$

por los elementos de la fila de orden i.

La suma de los productos de los elementos de una línea de una martiz cuadrada por los adjuntos de los elementos correspondientes de una paralela a ella, vale 0. Es decir,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0, \qquad i \neq k \neq j. \tag{14}$$

Las sumatorias anteriores serían el desarrollo por los elementos de la fila de orden i (columna de orden j) del determinante de una

matriz que tuviese las filas de órdenes i y k iguales (columnas de órdenes j y k iguales).

EJEMPLO 1.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 4(-72-30-100-72) - 3(24+10-3+24) + \\ + (25+18+60) = -1.158$$

habiéndose realizado el desarrollo por los elementos de la primera columna.

Para calcular el determinante de una matriz A de orden mayor que 3 se procede como sigue:

En primer lugar, se transforma la matriz A mediante combinaciones lineales de sus filas (columnas), con lo cual el valor de $|A|$ no varía, de forma que todos los elementos de una columna (fila), salvo uno, sean nulos. Naturalmente, se eligirá la columna o fila que tenga el mayor número de ceros. A continuación, se desarrolla el determinante por los elementos de dicha columna (fila). El desarrollo anterior no tendrá más que un término eventualmente no nulo. Hemos reducido así el problema al cálculo del determinante de una matriz cuadrada de orden $n-1$. Se sigue este procedimiento hasta llegar a tener que calcular el determinante de una matriz de orden 3 y entonces se emplea la regla de Sarrus.

EJEMPLO 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-3) \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9(18+12+28-24-21-12) = 9.$$

Los pasos seguidos han sido los siguientes:

a) sumar la fila 3.ª a las 1.ª, 4.ª y 5.ª,
b) desarrollar por los elementos de la 5.ª columna,
c) restar la 1.ª columna de la 2.ª,
d) desarrollar por los elementos de la 4.ª fila,
e) sacar factor común 3 en la 1.ª fila y
f) desarrollar por la regla de Sarrus.

EJEMPLO 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & (n \\ & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & (n-1 \\ & & & 1 \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} 1 & \\ & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

EJERCICIOS

1. Calcúlese:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 6 & 2 \\ -1 & 8 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 9 & -3 \end{vmatrix}$$

2. Calcúlese el determinante de la siguiente matriz triangular:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. Calcúlese el determinante siguiente, llamado de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ u & v & x & \ldots & y & z \\ u^2 & v^2 & x^2 & \ldots & y^2 & z^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u^{n-1} & v^{n-1} & x^{n-1} & \ldots & y^{n-1} & z^{n-1} \end{vmatrix}$$

4. Calcúlese:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & z & y \\ -b & -z & 0 & x \\ -c & -y & -x & 0 \end{vmatrix}$$

5. Calcúlese el siguiente determinante, llamado de Klein:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ t & x & y & z \\ z & t & x & y \\ y & z & t & x \end{vmatrix}.$$

6. Calcúlese:

$$\begin{vmatrix} 2+3i & 1-i & 4 \\ 1-2i & i & 1+i \\ -2 & 1 & 2-3i \end{vmatrix}.$$

7. Resuélvase la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 14-x & 66 & -42 \\ 4 & 24-x & -14 \\ 10 & 55 & -33-x \end{vmatrix} = 0.$$

8. Calcúlese:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

10.4. Producto de determinantes.

El determinante del producto de dos matrices cuadradas de orden n *es igual al producto de los determinantes de dichas matrices.*

En efecto, hemos visto que si $F\colon V^n \longrightarrow K$ es una forma n-lineal alternada y $u_1, u_2, \dots, u_n$ es una base de V y $x_1, x_2, \dots, x_n$ son n vectores de V, cuyas expresiones respecto a la base citada son

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} u_i, \qquad j = 1, 2, \dots, n \tag{15}$$

se tiene

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = |A| F(u_1, u_2, \dots, u_n) \tag{16}$$

donde hemos llamado B a la matriz (α_{ij}). Las n igualdades vectoriales (15) se pueden escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \tag{17}$$

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n vectores definidos por la igualdad matricial siguiente:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{18}$$

La expresión de estos vectores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en función de los vectores de la base dada, se obtiene sustituyendo en (18) la matriz de las x_i por su valor dado en (17), obtenemos así:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \tag{19}$$

La relación

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = |A| F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{20}$$

es siempre cierta, pues si los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son linealmente independientes, constituyen una base de V y dicha relación no es más que la igualdad (12). Si las x_i constituyen una familia ligada, también lo es la familia $\{y_i\}_{1 \leq i \leq n}$, luego por la propiedad *d)* de [10.1]:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0.$$

De las igualdades (20) y (16) resulta la igualdad

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = |A||B| F(u_1, u_2, \ldots, u_n) \tag{21}$$

y de (19) y (12):

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = |AB| F(u_1, u_2, \ldots, u_n) \tag{22}$$

y de (21) y (22):

$$|A||B| F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = |AB| F(u_1, u_2, \ldots, u_n) \tag{23}$$

y si suponemos que F se ha determinado de forma que

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 1,$$

obtenemos finalmente:

$$|A||B| = |AB|$$

como queríamos.

Como consecuencia de ser $|A'|=|A|$ y $|B'|=|B|$, resulta que

$$|AB|=|A||B|=|A'||B|=|A'B|=|A||B'|=|AB'|=|A'||B'|=|A'B'|.$$

Luego, si queremos $|AB|$, podemos efectuar el producto matricial AB de forma ortodoxa filas por columnas, o columnas por columnas, o filas por filas, o columnas por filas.

EJEMPLO.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6 & 0 & 5\\ 4 & 3 & -2\\ -1 & 7 & 1\end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix}25 & 13 & 12\\ 8 & -14 & 3\\ 18 & 31 & 17\end{pmatrix}$$

$$|A|=-13,\quad |B|=257,\quad |A||B|=(-13)\cdot 257=-3\cdot 341$$

$$|AB|=-3\cdot 341.$$

EJERCICIOS

1. ¿Qué valores puede tomar el determinante de una matriz ortogonal?

2. Sean A, B y C matrices cuadradas de orden n, tales que $B=CAC^{-1}$. Demuéstrese que

$$|A-xI_n|=|B-xI_n|.$$

3. Calcúlese $|A|$, siendo A la matriz que verifica la siguiente relación:

$$A\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 6 & 1\\ 5 & 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & 6 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

4. Sea

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\ x & x^2 & x^3 & 1\\ x^2 & x^3 & 1 & x\\ x^3 & 1 & x & x^2\end{vmatrix}$$

calcúlese $|A|^2$, sabiendo que $x^3=1$ y $x^2+x+1=0$.

10.5. Caracterización de las matrices regulares. Matrices singulares. Cálculo de la matriz inversa de una matriz regular.

Se ha visto (Ej. 1 de [9.5]) que toda matriz inversible es regular y viceversa. De ahora en adelante emplearemos exclusivamente el término regular para nombrar a las matrices inversibles.

También hemos visto en el párrafo [9.5], que toda matriz cuadrada de orden n regular, tiene rango n. El recíproco es igualmente

cierto, pues toda matriz de rango n puede considerarse como la matriz de un endomorfismo del espacio vectorial K^n, en el que los vectores de la base canónica se transforman en los vectores columna de la matriz citada. Luego, al ser éstos linealmente independientes, dicho endomorfismo es un automorfismo (teorema 1 de [8.1]) y la matriz es regular (véase el final del párrafo [9.5]).

Si una matriz no es regular se le llama *singular*. Por tanto, si la matriz A es singular, su rango es menor que su orden, es decir, los vectores columna de A son linealmente dependientes, luego, en virtud de la propiedad 8 de [10.2], $|A|=0$.

Si la matriz A es regular, existe su inversa A^{-1}, tal que verifica las igualdades

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I_n,$$

y tomando determinantes en los tres miembros

$$|AA^{-1}|=|A^{-1}A|=1$$

pero

$$|AA^{-1}|=|A||A^{-1}| \quad \text{y} \quad |A^{-1}A|=|A^{-1}||A|$$

luego, en resumen:

$$|A|\neq 0\neq|A^{-1}|.$$

Podemos, por tanto, afirmar que:

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea regular, es que su determinante sea distinto de cero.

Hemos obtenido también la siguiente cadena de equivalencias:

matriz inversible $\Longleftrightarrow$ matriz regular $\Longleftrightarrow$ matriz de rango n $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow$ matriz de determinante no nulo.

EJEMPLO 1. La matriz

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

es regular, puesto que $|A|=-13\neq 0$.

EJEMPLO 2. La matriz

$$B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

es singular. En efecto: $|B|=0$.

Llamaremos *matriz adjunta* de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a la matriz

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

que se obtiene sustituyendo en A cada elemento por el adjunto de su simétrico respecto a la diagonal principal.

Haciendo uso de las igualdades (14) y de las que nos dan el desarrollo de un determinante por los elementos de una línea, obtendremos

$$A\widetilde{A}=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}\right)=\begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}=|A|I_n,$$

luego, si $|A|\neq 0$, es decir, si A es regular, resulta que

$$A\cdot\frac{1}{|A|}\widetilde{A}=I_n$$

y análogamente

$$\frac{1}{|A|}\widetilde{A}\cdot A=I_n$$

con lo que, teniendo en cuenta la definición de matriz inversa, nos queda:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\widetilde{A}=\begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{|A|} & \dots & \dfrac{A_{n1}}{|A|} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dfrac{A_{1n}}{|A|} & \dots & \dfrac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 3. Si

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}, \quad \text{entonces} \quad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{13} & \frac{7}{13} & \frac{4}{13}\\ \frac{10}{13} & \frac{-9}{13} & \frac{-7}{13}\\ \frac{-1}{13} & \frac{-3}{13} & \frac{2}{13}\end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Calcúlese la inversa de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\ 2 & 3 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

2. Hállense las raíces de la ecuación

$$|A-xI_3|=0,$$

siendo A la matriz cuadrada que cumple la siguiente igualdad matricial:

$$A\begin{pmatrix}3 & 0 & -4\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -2 & 0\\ 2 & 0 & -9\\ 7 & -1 & 7\end{pmatrix}.$$

3. Sea A una matriz regular de orden n, la cual se ha fraccionado en bloques de la siguiente forma:

$$A=\begin{pmatrix}M_{p\times p} & N_{p\times q}\\ R_{q\times p} & S_{q\times q}\end{pmatrix}$$

Supongamos que su inversa se ha descompuesto en bloques de la misma forma:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}X_{p\times p} & Y_{p\times q}\\ Z_{q\times p} & T_{q\times q}\end{pmatrix}$$

y que la matriz $S_{q\times q}$ es regular. Calcúlense los bloques de A^{-1} en función de los de A. (Los subíndices indican las dimensiones de los bloques.)

10.6. Caracterización y cálculo del rango de una matriz.

Sea A una matriz cualquiera, cuadrada o no, al determinante de cualquier submatriz cuadrada de orden p de A se le llama *menor de orden* p *de* A.

Vamos a definir una aplicación del conjunto de todas las matri-

ces sobre el conjunto de los números enteros no negativos Z_+. A cada matriz A le asociaremos el mayor orden de sus menores no nulos. Lo indicaremos por $r(A)$. Comprobaremos a continuación que este número entero no negativo $r(A)$ es precisamente el rango de A.

Desde luego, si las dimensiones de A son $m \times n$, se verifica que $r(A)$ es menor o igual que el menor de los números m y n.

Supongamos que $r(A)=n$, eso quiere decir que existe un menor de A de orden n, distinto de cero. En dicho menor intervienen n de las m componentes de los n vectores columna de A, dispuestas a su vez en columna. La independencia lineal de estas últimas columnas implica la independencia lineal de los vectores columna de la matriz A.

Supongamos ahora que $r(A)=r<n$. Entonces $n=r+p$, con $p>0$. No se introduce ninguna restricción en nuestro razonamiento, si se supone que uno de los menores de orden r de A no nulos es el

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

formado por los elementos de las r primeras filas y r primeras columnas de A.

Por un razonamiento análogo al anterior, se comprueba que los r primeros vectores columna de A son linealmente independientes.

Para demostrar que los $n-r$ restantes vectores columna de A dependen linealmente de estos r primeros, procedemos como sigue: orlamos Δ con la columna de orden $r+j$ ($j=1, 2, \dots, n-r$) y la fila de orden i ($i=1, 2, \dots, m$). El menor así obtenido:

$$\Delta(i,j)=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+j} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+j} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{i,r+j} \end{vmatrix}$$

es nulo. Bien por que se haya tomado $i \leq r$, en cuyo caso tiene dos filas iguales; o por que se haya tomado $i>r$, y entonces es un menor de A de orden $r+1$.

Desarrollando $\Delta(i,j)$ por los elementos de la última fila, obtenemos:

$$\Delta(i,j)=\lambda_{1j}a_{i1}+\lambda_{2j}a_{i2}+\dots+\lambda_{rj}a_{ir}+\Delta a_{i,r+j}=0, \tag{24}$$

donde λ_{kj} indica el adjunto del elemento a_{ik} en $\Delta(i,j)$. Ahora bien, por hipótesis, $\Delta \neq 0$, luego podemos escribir:

$$a_{i,r+j}=-\frac{\lambda_{1j}}{\Delta}a_{i1}-\frac{\lambda_{2j}}{\Delta}a_{i2}-\dots-\frac{\lambda_{rj}}{\Delta}a_{ir}.$$

Si llamamos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a los vectores columna de A y ponemos $\mu_{kj} = -\dfrac{\lambda_{kj}}{\Delta}$, las $m+(n-r)$ igualdades escalares anteriores son equivalentes a las $n-r$ igualdades vectoriales siguientes:

$$v_{r+j} = \mu_{1j}v_1 + \mu_{2j}v_2 + \ldots + \mu_{rj}v_r, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-r, \tag{25}$$

que expresan que los vectores columna $v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n$ dependen linealmente de los $v_1, v_2, \ldots, v_r$, como queríamos demostrar.

Al menor Δ, uno de los de mayor orden no nulos de A, se le llama *menor principal* de la matriz A.

Si tenemos en cuenta la significación de los coeficientes escalares de las igualdades (24) y (25), podemos deducir un método para calcular la relación de dependencia lineal que liga a los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+j}$. Dicho método es el siguiente:

Se forma una matriz simbólica orlando la matriz del menor principal Δ con una fila formada por los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+j}$ y una columna constituida por las coordenadas correspondientes del último vector:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1,r+j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{r,r+j} \\ v_1 & \ldots & v_r & v_{r+j} \end{pmatrix}$$

Si desarrollamos formalmente el determinante de esta matriz por los elementos de la última fila e igualamos a cero, obtenemos:

$$\lambda_{1j}v_1 + \lambda_{2j}v_2 + \ldots + \lambda_{rj}v_r + \Delta v_{r+j} = 0$$

que es la relación buscada.

El razonamiento se ha hecho con vectores columna, pero igualmente se hubiera podido efectuar para vectores fila.

Es evidente que $r(A) = r(A')$, puesto que las submatrices cuadradas de A' son las transpuestas de las de A y el determinante de una matriz es igual al de su transpuesta. Por tanto, el rango de una matriz es igual al de su transpuesta. Pero los vectores columna de A' son los vectores fila de A, luego *el rango de los vectores fila y el de los vectores columna de una matriz es el mismo y es, a su vez, igual al mayor orden de los menores no nulos de dicha matriz.*

Como consecuencia de lo anterior, si en una matriz se suprimen una o más líneas que son combinación lineal de las restantes líneas paralelas que no se omiten, la nueva matriz tiene el mismo rango que la original. Este hecho nos permite abreviar el proceso de cálculo para hallar el rango de una matriz dada. El procedimiento es el siguiente: se calculan los menores de la submatriz formada por las

dos primeras filas de la dada, hasta hallar uno de segundo orden distinto de cero; si no existiera ninguno, eso significaba que dichas dos primeras filas eran proporcionales y entonces se suprimía una de ellas, por ejemplo, la segunda, y se procedería a calcular los menores de la submatriz formada por las filas primera y tercera, hasta hallar uno distinto de cero, etc. Si, por el contrario, existiese un menor de segundo orden de la primera submatriz considerada, distinto de cero, se orlaría éste con la tercera fila y las restantes columnas y se calcularían los menores de tercer orden, hasta hallar uno distinto de cero; si esto no fuera posible, la tercera fila sería combinación lineal de las dos anteriores y podríamos prescindir de ella; la sustituiríamos por la cuarta y continuaríamos de esta manera el proceso, hasta que al orlar un menor de orden r no nulo sucesivamente con las filas y columnas restantes, todos los menores de orden $r+1$ de dichas submatrices fueran nulos. Al llegar a este punto, podríamos afirmar que el rango de la matriz dada era r.

EJEMPLO 1. Vamos a calcular el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 6 & 10 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & -1 & 4 & 2 \\ 7 & 14 & 9 & -13 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

Se ve inmediatamente que la segunda fila es proporcional a la primera, por lo que puede suprimirse. Calculemos los menores de segundo orden de la submatriz formada por las filas 1.ª y 3.ª de A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=10\neq 0$, luego el rango es por lo menos dos. Calculemos los menores de tercer orden de la submatriz que se obtiene al orlar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

con la cuarta fila y restantes columnas. Son los

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 14 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & -13 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 9 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 9 & 12 \end{vmatrix}=0.$$

Por tanto, el rango de A es dos.

EJEMPLO 2. Se dan los siguientes vectores de R^5 mediante sus coordenadas respecto a una cierta base:

$$v_1=(3,0,1,2,4), \qquad v_4=(1,0,1,0,1),$$
$$v_2=(1,2,0,4,-1), \qquad v_5=(0,-8,2,-14,9),$$
$$v_3=(-5,-10,0,-20,5), \qquad v_6=(2,2,1,4,0).$$

¿cuál es el máximo número de entre ellos linealmente independientes?

El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ -5 & -10 & 0 & -20 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 2 & -14 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

es 3, luego el mayor número de vectores linealmente independientes es 3. Un menor principal es el

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

luego los vectores v_1, v_2 y v_4 son linealmente independientes y los tres restantes dependen linealmente de ellos. Las relaciones de dependencia lineal son:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & v_1 \\ 1 & 2 & 0 & v_2 \\ 1 & 0 & 1 & v_4 \\ -5 & -10 & 0 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 0v_1+20v_2+0v_4+4v_3=0 \Longrightarrow v_3=-5v_2.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & v_1 \\ 1 & 2 & 0 & v_2 \\ 1 & 0 & 1 & v_4 \\ 0 & -8 & 2 & v_5 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -4v_1+16v_2-4v_4+4v_5=z \Longrightarrow v_5=v_1-4v_2+v_4.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & v_1 \\ 1 & 2 & 0 & v_2 \\ 1 & 0 & 1 & v_4 \\ 2 & 2 & 1 & v_6 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 0v_1-4v_2-4v_4+4v_6=0 \Longrightarrow v_6=v_2+v_4.$$

EJSMPLO 3. Los vectores $(3, 2, -4)$, $(1, -5, 2)$, $(-9, 11, 2)$, ¿constituyen una base de R^3? La contestación es negativa, ya que

$$r\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 2 \\ -9 & 11 & 2 \end{pmatrix} < 3,$$

por ser nulo el determinante de dicha matriz.

EJERCICIOS

1. Calcúlese el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 17 & 16 & 26 \\ -3 & -2 & 21 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Calcúlese el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

cuyos elementos pertenecen al cuerpo $Z/7Z$.

3. ¿Cuál es la dimensión de la variedad lineal engendrada por los vectores $(2, 1, -1, 0)$, $(3, 0, 1, 1)$, $(5, 1, 0, 2)$, $(1, -1, 2, 1)$, $(1, 2, -3, 1)$ de R^4? Hállese una base de dicha variedad lineal.

4. Dados los vectores $(7, -12, 23)$, $(3, -2, 5)$ y $(1, 3, -4)$, demuéstrese que son coplanarios.

5. Sean $u_1=(3, -1, 4)$, $u_2=(1, 2, -1)$ y $u_3=(-5, 6, -11)$ los vectores de una base de R^3. ¿Qué vectores de esta base pueden sustituirse por el vector $v=(5, 7, -2)$ de forma que el nuevo conjunto de tres vectores siga siendo una base?

6. Dados los vectores $(3, 2, -1, 4)$, $(-6, -4, 2, 1)$ y $(2, -3, -5, 6)$, hállese un vector con el mayor número posible de coordenadas nulas, que con los tres anteriores forme una base de R^4.

7. Demuéstrese que los vectores $v_1=(3, -1, 4)$ y $v_2=(5, 3, -2)$ engendran la misma variedad lineal de R^3 que los $u_1=(2, 4, -6)$ y $u_2=(20, 12, -8)$.

8. A los polinomios homogéneos se les llama *formas*.

Compruébese que el conjunto de las formas de grado p en n indeterminadas con coeficientes de un cuerpo K, constituyen un espacio vectorial sobre K, con la adición y la multiplicación por un escalar habituales. Hállese la dimensión de este espacio vectorial.

9. Hállese la relación de dependencia lineal que liga a las siguientes formas lineales:

$$\begin{aligned} A &= 3x+2y-4z, \\ B &= x-3y+6z, \\ C &= 14x+9y+18z. \end{aligned}$$

JAR'23

11

sistemas de ecuaciones lineales

11.1. Definiciones y notación.

Dadas m formas lineales en n indeterminadas con coeficientes en un curepo conmutativo K:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n, \end{aligned}$$

y m elementos de K, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ vamos a estudiar el problema de hallar n elementos de K, tales que al sustituirlos en cada una de las formas $f_1, f_2, \ldots, f_m$ en lugar de las indeterminadas, dichas formas tomen los valores $b_1, b_2, \ldots, b_m$, respectivamente.

Al conjunto de las expresiones siguientes:

$$(26) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

se le llama *sistema de* m *ecuaciones lineales con* n *incógnitas*. A todo conjunto de n valores de K, que sustituidos en lugar de las $x_1, x_2, \ldots, x_n$ convierta las ecuaciones anteriores en identidades se le llama una *solución* del sistema. Si un sistema de ecuaciones lineales posee al menos una solución, se le llama *compatible*. Compatible *determinado* si admite una sola solución y compatible *indeterminado* si admite más de una. Si el sistema no posee solución se dice de él que es *incompatible*. Dos sistemas de ecuaciones lineales se denominan *equivalentes* si ambos poseen las mismas soluciones.

11.2. Sistema de Cramer.

En el caso de que el número de ecuaciones coincida con el número de incógnitas ($m=n$), el problema es equivalente al de hallar los vectores del espacio vectorial K^n, que mediante el endomorfismo definido por las ecuaciones

$$(27)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

se transforma en el vector $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Se vio en el párrafo [9.5] que, en este caso, existía una solución y sólo una si la matriz $A=(a_{ij})$ era regular y que, en caso contrario, o no existía ninguna o existía más de una. Luego el sistema es compatible y determinado si $|A|\neq 0$ e incompatible o compatible indeterminado si $|A|=0$. En el primer caso al sistema se le llama de Cramer.

A continuación vamos a calcular la solución única de un sistema de Cramer.

Supongamos que el sistema (27) es de Cramer, con lo que $|A|\neq 0$. Dicho sistema lo podemos escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$(28)\qquad AX'=B',$$

donde hemos llamado X y B a las matrices $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$ y $(b_1\ b_2\ \ldots\ b_n)$, respectivamente.

Puesto que A es regular, existe A^{-1}. Multiplicando ambos miembros de (28) por A^{-1}, por la izquierda, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X' = A^{-1}AX' = A^{-1}B' = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{|A|} & \dfrac{A_{21}}{|A|} & \ldots & \dfrac{A_{n1}}{|A|} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{A_{1n}}{|A|} & \dfrac{A_{2n}}{|A|} & \ldots & \dfrac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

de donde

$$x_i=\frac{A_{1i}b_1+A_{2i}b_2+\ldots+A_{ni}b_n}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & \ldots & b_j & \ldots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

obsérvese que el numerador de la última fracción es el determinante de la matriz que se obtiene al sustituir la columna de orden i de la matriz A por los términos independientes $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Y estas son las fórmulas que nos dan la solución de un sistema de Cramer, en función de los coeficientes de las incógnitas y de los términos independientes.

EJEMPLO. Comprobemos que el sistema de ecuaciones lineales siguiente es de Cramer y hallemos su solución:

$$\begin{aligned} 3x-2y+4z&=0\\ x+y-3z&=2\\ -x+2y-z&=-3. \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -3\\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=19\neq 0, \qquad x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4\\ 2 & 1 & -3\\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{19}=\frac{6}{19},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4\\ 1 & 2 & -3\\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{19}=\frac{-37}{19}, \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{19}=\frac{-23}{19},$$

luego la solución es

$$\frac{6}{19}, \quad \frac{-37}{19}, \quad \frac{-23}{19}.$$

EJERCICIOS

1. Compruébese si el siguiente sistema de ecuaciones lineales es de Cramer y, caso afirmativo, hállese la solución:

$$\begin{aligned} x+\phantom{2y+{}}z+t&=11\\ 2y+2z&=8\\ x+y&=1\\ -x+3z&=13. \end{aligned}$$

2. Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} (2-i)x+iy+(1+i)z&=1\\ 4x-2y+iz&=0\\ x-(1-i)y&=i. \end{aligned}$$

3. Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones lineales sobre el cuerpo $Z/5Z$:

$$\begin{aligned} \bar{3}x\phantom{+\bar{2}y}+z&=\bar{4}\\ \bar{2}x+\bar{2}y+\bar{4}z&=\bar{4}\\ \bar{4}x+\bar{3}y+\bar{2}z&=\bar{1}. \end{aligned}$$

4. Compruébese que los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes:

$$\begin{cases} -3x+2y-z=0 \\ 5x+6y+2z=3 \\ 4x+16y+2z=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x+12y-z=2 \\ 7x+14y+3z=6 \end{cases}$$

5. Las ecuaciones siguientes ¿pueden ser las ecuaciones de un automorfismo de R^3?

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1-2x_2+7x_3 \\ y_2 &= -5x_1+x_2-4x_3 \\ y_3 &= -10x_1+2x_2-8x_3. \end{aligned}$$

6. Determínense α y β de forma que el vector $(-3, \alpha, 7, \beta)$ pertenezca a la variedad lineal engendrada por los vectores $v_1=(1, 0, 1, 3)$, $v_2=(-4, 3, 1, 0)$ y $v_3=(-2, 3, 3, 6)$.

7. Los siguientes vectores de R^4 se dan mediante sus coordenadas respecto a una misma base:

$$\begin{aligned} &u_1=(1, 0, 1, 0), \quad u_2=(1, 1, 0, 1), \quad u_3=(0, 1, 1, 0), \\ &u_4=(0, 1, 0, 1), \quad v=(1, 4, 4, 3), \quad w=(6, 2, 1, 2), \end{aligned}$$

hállense las coordenadas de v y w respecto a la base u_1, u_2, u_3, u_4.

11.3. Teorema de Rouché-Frobenius.

El problema de los sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes sobre un cuerpo K, queda resuelto por completo mediante el llamado teorema de Rouché-Frobenius (también llamado de Kronecker), que pasamos a enunciar.

Teorema de Rouché-Frobenius. *Una condición necesaria y suficiente para que un sistema de* m *ecuaciones con* n *incógnitas, con coeficentes de un cuerpo* K [11], *sea compatible, es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz que se obtiene orlando la anterior con los términos independientes. En caso de ser compatible el sistema, si el rango común de las dos matrices es igual al número de incógnitas, es determinado; si dicho rango es menor que el número de incógnitas, el sistema es indeterminado.*

Sea el sistema (26). Si llamamos v_1, v_2, ..., v_n a los vectores columna de la matriz de los coeficientes y b al formado por los términos independientes, (26) puede escribirse en la siguiente forma vectorial:

$$x_1v_1+x_2v_2+\ldots+x_nv_n=b.$$

Llamaremos A y B a las matrices de los coeficientes y a la obtenida orlando ésta con los términos independientes, respectivamente.

---

[11] Se supone, como siempre, K conmutativo.

Si el sistema es compatible y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ es una solución, de (29) obtenemos:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = b,$$

lo que nos dice que el vector b es combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, luego rango de A igual a rango de B y la condición es necesaria.

Si rango A = rango $B = r$, existe un menor de A de orden r distinto de cero y todos los de órdenes superiores son nulos. No se introduce ninguna restricción en la demostración, al suponer que un menor principal está formado con elementos de las r primeras columnas de A. Entonces los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r$ son linealmente independientes y los $v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n, b$ pertenecen a la variedad lineal engendrada por los anteriores. Igual ocurrirá con los vectores $x_{r+1}v_{r+1}, x_{r+2}v_{r+2}, \ldots, x_n v_n$, cualesquiera que sean los valores de $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ pertenecientes a K. Y análogamente ocurrirá con el vector:

$$b - (x_{r+1}v_{r+1} + x_{r+2}v_{r+2} + \ldots + x_n v_n).$$

Pero la expresión de un vector respecto de los elementos de una base es *única*, luego una vez que se han elegido los valores de $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_r$ que verifican la igualdad

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_r v_r = b - (x_{r+1}v_{r+1} + \ldots + x_n v_n)$$

están determinados de manera única y se obtienen resolviendo un sistema de Cramer:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r &= b_1 - (a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n) \\
a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r &= b_2 - (a_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r &= b_r - (a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n)
\end{aligned}$$

A estas r ecuaciones se les llama *ecuaciones principales* del sistema, y a las $x_1, x_2, \ldots, x_r$ se las denomina *incógnitas principales*. Naturalmente, en un mismo sistema puede que existan distintos conjuntos de ecuaciones principales.

Como se ha visto, la condición es también suficiente.

EJEMPLO. El sistema

$$\begin{aligned}
2x - 3y + z - t &= 5 \\
x - 2z - 2t &= 6 \\
-3y + 5z - 5t &= -7 \\
5x - 6y &= 16
\end{aligned}$$

es compatible, ya que

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -5 \\ 5 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & -7 \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 2.$$

Las ecuaciones principales son:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z - t &= 5 \\ x - 2z + t &= 6, \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 - z + t \\ x &= 6 - 2z + 2t, \end{aligned}$$

obtenemos la solución general:

$$x = 6 + 2z - 2t$$
$$y = \frac{7 + 5z - 5t}{3}.$$

Una solución particular sería, por ejemplo, haciendo $z=1$, $t=3$:

$$(2, -1, 1, 3).$$

EJERCICIOS

1. Estúdiese el sistema

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ 3x - 2y + 5z &= 0 \\ 2x - 3y + 5z &= 2. \end{aligned}$$

2. Averígüese si el vector $(11, -26, 22, -2)$ pertenece a la variedad lineal engendrada por los $(3, 2, 1, 4)$ y $(1, -6, 4, 2)$.

3. Averígüese si el vector $(-10, -20, 4, -20)$ pertenece a la variedad lineal engendrada por los $(3, 2, 1, 4)$, $(1, -6, 4, -2)$ y $(8, 12, -1, 14)$.

4. Los Ejs. 3 y 4 anteriores son análogos, sin embargo, el resultado es ligeramente diferente. Dése una explicación vectorial de esa diferencia.

5. Hállense todos los vectores de la variedad lineal engendrada por los $(3, -2, 5, 4)$, $(-6, 4, -10, -8)$, $(1, 0, 5, -2)$, $(4, -2, 10, 2)$.

6. Estúdiese el sistema

$$\begin{aligned}(3-\lambda)x- \quad & y+ \quad & z=0\\ -x+(5-\lambda)y- \quad & & z=0\\ x- \quad & y+(3-\lambda)z=0\end{aligned}$$

según los valores de λ.

7. Estúdiese el sistema

$$\begin{aligned}-\lambda x+ \; y+ \; 2z&=0\\ x+ \quad z&=\mu\\ -x+2y+\lambda\mu z&=\lambda\end{aligned}$$

según los valores de λ y μ.

8. Hállense todos los vectores de R^3 que, mediante el endomorfismo dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}x_1'&= 3x_1+ 5x_2+ 6x_3\\ x_2'&= x_1- 2x_2+ 4x_3\\ x_3'&=10x_1+13x_2+22x_3\end{aligned}$$

se transforman en el vector $(-19, -20, -77)$.

11.4. Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales.

Un sistema de ecuaciones lineales se llama *homogéneo* si todos los términos independientes son nulos.

En un sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned}&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0\end{aligned}$$

el rango de la matriz de los coeficientes y el de la ampliada con los términos independientes son siempre iguales, pues el vector cero es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores. Luego, todo sistema lineal homogéneo es compatible. En efecto, se ve a simple vista que $(0, 0, \ldots, 0)$ es una solución del sistema. A esta solución se le llama, por razones que se verán más adelante, *solución trivial,* y se suele decir que el sistema es compatible cuando admite alguna solución distinta de la trivial. Desde luego, si $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ es una solución distinta de la trivial $(k\lambda_1, k\lambda_2, \ldots, k\lambda_n)$ es también solución cualquiera que sea el valor de $k \in K$, como se ve fácilmente.

Entonces para que un sistema lineal homogéneo sea compatible, se decir, para que admita alguna solución distinta de la trivial, tiene

que ser indeterminado, luego, de acuerdo con el teorema de Rouché-Fröbenius, bastará con que el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas sea menor que el número de éstas.

Si el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas es menor en una unidad al número de éstas y suponiendo que

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

es un menor principal de dicha matriz, tenemos que

$$x_i=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & -a_{1n}x_n & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n-1,1} & \dots & -a_{n-1,n}x_n & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}}$$

$i=1, 2, \dots, n-1$. De donde

$$\frac{x_i}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}}=\frac{x_n}{-\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}}$$

y de todas ellas

$$\frac{x_1}{\Delta_1}=\frac{x_2}{\Delta_2}=\dots=\frac{x_{n-1}}{\Delta_{n-1}}=\frac{x_n}{-\Delta}$$

siendo Δ_i el menor de la matriz que se obtiene al sustituir en la matriz de Δ la columna de orden i por la formada por los coeficientes de la incógnita x_n en las $n-1$ primeras ecuaciones.

EJEMPLO. El sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned} 3x-2y+3z&=0 \\ -10x+y-5z&=0 \\ -8x-6y+2z&=0 \end{aligned}$$

es compatible ya que

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -10 & 1 & -5 \\ -8 & -6 & 2 \end{vmatrix}=0$$

por lo que rango de $A<3$. Las soluciones vienen dadas por

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -10 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{z}{-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -10 & 1 \end{vmatrix}}$$

luego

$$\frac{x}{-7} = \frac{y}{15} = \frac{z}{17}.$$

EJERCICIOS

1. Resuélvase el sistema

$$\begin{aligned} 12x+66y-42z&=0 \\ 4x+22y-14z&=0 \\ 10x+55y-35z&=0. \end{aligned}$$

2. Hállese el núcleo del endomorfismo de R^4 cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \quad\quad -x_3+2x_4 \\ x_2' &= x_1+2x_2+x_3+x_4 \\ x_3' &= 3x_1 \quad\quad +x_3 \\ x_4' &= -x_1+2x_2-x_3+2x_4. \end{aligned}$$

3. Hállense los vectores de R^3 que se transforman en sí mismos mediante el endomorfismo de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1' &= 5x_1-3x_2+2x_3 \\ x_2' &= 6x_1-4x_2+4x_3 \\ x_3' &= 4x_1-4x_2+5x_3. \end{aligned}$$

4. Discútase el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} (4-\lambda)x- \quad 5y+ \quad 7z&=0 \\ x-(4+\lambda)y+ \quad 9z&=0 \\ -4x \quad +(5-\lambda)z&=0 \end{aligned}$$

según los valores de λ. Primero, en el cuerpo de los números reales; segundo, en el cuerpo de los números complejos.

5. Hállense los valores de λ, μ, ρ, para que el siguiente sistema lineal homogéneo sea compatible:

$$\begin{aligned} 3x+2\lambda y+4z&=0 \\ x+\mu y+z&=0 \\ y-z&=0 \\ x-y+\rho z&=0 \\ x-y+z&=0 \end{aligned}$$

6. Hállense todos los vectores de R^3 que, mediante el automorfismo de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1' &= -9x_1+19x_2+4x_3 \\ x_2' &= -3x_1+7x_2+x_3 \\ x_3' &= -7x_1+17x_2+2x_3 \end{aligned}$$

se transforman en vectores proporcionales a ellos.

7. Resuélvase el sistema

$$\begin{aligned} 3x-3y-3z &= 0 \\ -5x+5y+5z &= 0 \\ 4x-6y-14z &= 0 \\ -2x+4y+12z &= 0 \\ x+4z &= 0 \\ 8x-7y-3z &= 0. \end{aligned}$$

8. Demuéstrese que si el rango de la matriz de los coeficientes de las n incógnitas de un sistema lineal homogéneo es r, las soluciones de dicho sistema constituyen una variedad lineal de dimensión $n-r$ del espacio vectorial K^n sobre K. (Sugerencia: demuéstrese que las $n-r$ soluciones obtenidas al dar a las incógnitas no principales $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ los valores $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 1)$, respectivamente, constituyen una base del conjunto de todas las soluciones.)

12

aplicación de la teoría de matrices y determinantes a los espacios vectoriales

12.1. Cambio de base.

Sean $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ y $\{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$ sendas bases de un espacio vectorial V de dimnesión n. Nos proponemos hallar la relación que existe entre las coordenadas $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ de un vector $v \in V$ respecto a la primera base y las coordenadas $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_n')$ del mismo vector respecto a la segunda base.

Sean $v_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} u_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ las relaciones que ligan los vectores de la segunda base con los de la primera. Tenemos que

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} u_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} \alpha_i' \right) u_j$$

de donde

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} \alpha_i' \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

en virtud de la independencia lineal de los vectores básicos u_1, u_2, ..., u_n.

Escritas con todo detalle, las ecuaciones anteriores serían:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \beta_{11}\alpha_1' + \beta_{21}\alpha_2' + \ldots + \beta_{n1}\alpha_n' \\
\alpha_2 &= \beta_{12}\alpha_1' + \beta_{22}\alpha_2' + \ldots + \beta_{n2}\alpha_n' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_n &= \beta_{1n}\alpha_1' + \beta_{2n}\alpha_2' + \ldots + \beta_{nn}\alpha_n'
\end{aligned}$$

las cuales pueden resumirse nuevamente en la igualdad matricial siguiente:

$$(\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n) = (\alpha_1'\ \alpha_2' \ldots \alpha_n')(\beta_{ij})^*$$

o bien, si llamamos $X=(\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n)$, $X^*=(\alpha_1'\ \alpha_2'\ \dots\ \alpha_n')$ y $B=(\beta_{ij})^t$:

$$X=X^*B \tag{30}$$

Las filas de la matriz B son, pues, las coordenadas de los vectores v_i respecto a la primera base, pero dichos vectores v_i constituyen, por hipótesis, una base de V, luego, son linealmente independientes y, por tanto, la matriz B es regular. Multiplicando la igualdad matricial (30) por B^{-1}, por la derecha, obtenemos:

$$X^*=XB^{-1} \tag{30'}$$

ecuación que nos da las coordenadas de v respecto a la segunda base, en función de las coordenadas del mismo vector respecto a la primera.

A las igualdades (30) y (30') se les llama *ecuaciones de cambio de base.*

Si aplicamos las ecuaciones de cambio de base a los vectores $w_1, w_2, \dots, w_m$, obtendremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
(\gamma_{11}\quad \gamma_{12}\ \dots\ \gamma_{1n}) &= (\gamma'_{11}\quad \gamma'_{12}\ \dots\ \gamma'_{1n})B\\
(\gamma_{21}\quad \gamma_{22}\ \dots\ \gamma_{2n}) &= (\gamma'_{21}\quad \gamma'_{22}\ \dots\ \gamma'_{2n})B\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(\gamma_{m1}\quad \gamma_{m2}\ \dots\ \gamma_{mn}) &= (\gamma'_{m1}\quad \gamma'_{m2}\ \dots\ \gamma'_{mn})B
\end{aligned}$$

siendo γ_{ij} la coordenada de orden j del vector w_i respecto a $\{u_i\}_{1\le i\le n}$ y γ_{ij}' la coordenada del mismo orden de dicho vector respecto a $\{v_i\}_{1\le i\le n}$. Pero estas m igualdades son equivalentes a la igualdad matricial única siguiente:

$$\begin{pmatrix}
\gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n}\\
\gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n}\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
\gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \dots & \gamma_{mn}
\end{pmatrix} =
\begin{pmatrix}
\gamma'_{11} & \gamma'_{12} & \dots & \gamma'_{1n}\\
\gamma'_{21} & \gamma'_{22} & \dots & \gamma'_{2n}\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
\gamma'_{m1} & \gamma'_{m2} & \dots & \gamma'_{mn}
\end{pmatrix} B$$

Ahora bien, la dependencia lineal de los vectores $w_1, w_2, \dots, w_n$ no depende de la base elegida para expresarlos; por tanto, teniendo en cuenta que la matriz B es regular, hemos obtenido el siguiente resultado:

Si se multiplica una matriz A *por una matriz regular, la matriz que se obtiene tiene el mismo rango que* A.

EJEMPLO. Las ecuaciones de cambio de base correspondientes a

las bases $\{u_1, u_2\, u_3\}$ y $\{v_1, v_2, v_3\}$, tales que

$$\begin{aligned} v_1 &= 3u_1 + 2u_2 + u_3 \\ v_2 &= u_1 \quad - u_3 \\ v_3 &= 4u_1 + u_2 + 3u_3. \end{aligned}$$

son

$$X = X^* \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad X^* = X \begin{pmatrix} \frac{-1}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{7}{10} & \frac{-5}{10} & \frac{-4}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{-5}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Las coordenadas de los vectores w_1, w_2 y w_3 respecto a las bases $\{u_1, u_2, u_3\}$ y $\{v_1, v_2, v_3\}$ son, respectivamente:

$$\begin{aligned} w_1 &\text{ — } (3, -1, 4) \text{ — } (1, 0, 2) \\ w_2 &\text{ — } (2, 0, 2) \text{ — } (-2, 1, -4) \\ w_3 &\text{ — } (1, -1, 4) \text{ — } (-1, 1, 0). \end{aligned}$$

Hállense las coordenadas de v_1, v_2 y v_3 respecto a la base $\{u_i\}_{1 \le i \le 3}$ y las ecuaciones de cambio de base.

2. Las ecuaciones de cambio de base respecto a las bases $\{u_i\}_{1 \le i \le 3}$ y $\{u_i'\}_{1 \le i \le 3}$ son:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

y las de cambio de base respecto a las bases $\{u_i''\}_{1 \le i \le 3}$ y $\{u_i'\}_{1 \le i \le 3}$ son:

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1'' + 2x_2'' - 3x_3'' \\ x_2' &= x_1'' - x_2'' + x_3'' \\ x_3' &= 5x_1'' + 4x_2'' - x_3''. \end{aligned}$$

Hállense las ecuaciones de cambio de base respecto a las bases $\{u_i\}_{1 \le i \le 3}$ y $\{u_i''\}_{1 \le i \le 3}$.

3. Una base del espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales, de los vectores del plano con origen en un punto fijo, está constituida por los vectores u_1, u_2, unitarios y ortogonales. Hállense las ecuaciones de cambio de base respecto a la anterior y a la $\{v_1, v_2\}$, siendo

$$|v_1| = |v_2| = 1, \qquad \widehat{u_1 v_1} = 30^\circ \qquad \text{y} \qquad \widehat{u_1 v_2} = 225^\circ.$$

12.2. Ecuaciones paramétricas y no paramétricas de las variedades lineales.

Sea L la variedad lineal engendrada por los vectores $v_1, v_2, \ldots v_s$ de un espacio vectorial V de dimensión n sobre un cuerpo conmutativo K. Supongamos que las expresiones de dichos vectores como combinación lineal de los elementos de la base $\{u\}_{1\leq i\leq n}$ son

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} u_j \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$

Si el rango de la matriz $(\alpha_{ij})_{s\times n}$ es r y si

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1r} \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ \alpha_{r1} & \ldots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}$$

es un menor principal de la misma, los vectores $v_1, v_2, \ldots v_r$ constituyen una base de L y la dimensión de esta variedad lineal es r. Todo vector $x \in L$ puede expresarse, de manera única, como combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r$:

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r.$$

Si las coordenadas de x respecto a la base $\{u_i\}_{1\leq i\leq n}$ de V son $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la igualdad vectorial anterior es equivalente a las siguientes n ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{21} + \ldots + \lambda_r\alpha_{r1} \\ x_2 &= \lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\alpha_{22} + \ldots + \lambda_r\alpha_{r2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \lambda_1\alpha_{1n} + \lambda_2\alpha_{2n} + \ldots + \lambda_r\alpha_{rn} \end{aligned} \tag{31}$$

Estas son las llamadas *ecuaciones paramétricas* de la variedad lineal L. A los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$—cuya variación dentro de K nos daría, junto con las ecuaciones (31), todos los vectores de L—se les denomina *coordenadas del vector* x *respecto a la base* $\{v_i\}_{1\leq i\leq r}$ *de* L.

Obsérvese que un mismo vector puede expresarse mediante un número distinto de coordenadas, dependiendo de la variedad lineal en que se considere sumergido.

EJEMPLO 1. Sea L la variedad lineal engendrada por los vectores

$(1, -2, 7)$, $(-3, 1, -9)$, $(-3, -4, 3)$ y $(-3, 6, -21)$. Puesto que

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -3 & 1 & -9 \\ -3 & -4 & 3 \\ -3 & 6 & -21 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

los vectores $(1, -2, 7)$ y $(-3, 1, -9)$ pueden tomarse como una base de L. Las ecuaciones paramétricas de L son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 - 3\lambda_2 \\ x_2 &= -2\lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 &= 7\lambda_1 - 9\lambda_2 \end{aligned}$$

comprobado

y es fácil comprobar que las coordenadas de los vectores $(-3, -4, 3)$ y $(-3, 6, -21)$, respecto a la base elegida en L, son $(3, 2)$ y $(-3, 0)$, respectivamente.

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ es un vector de L, depende linealmente de v_1, $v_2, \ldots, v_r$ y no depende linealmente de dichos vectores si no pertenece a L. Esto equivale a decir que la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \ldots & \alpha_{rn} \end{pmatrix} \tag{32}$$

es de rango r si $x \in L$ y de rango $r+1$ si $x \notin L$.

Luego, si queremos hallar las condiciones que deben cumplir las coordenadas de un vector $x \in V$ para que dicho vector pertenezca a L, bastará que igualemos los menores de orden $r+1$ de la matriz (32) a cero

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{r+1} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1r+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \ldots & \alpha_{rr+1} \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} x_{n-r} & \ldots & x_n \\ \alpha_{1,n-r} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{r,n-r} & \ldots & \alpha_{rn} \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando estos menores por los elementos de la primera fila obtendríamos un sistema lineal homogéneo de $\binom{n}{r+1}$ ecuaciones con n incógnitas, que serían las relaciones buscadas. Ahora bien, si tenemos en cuenta el resultado del Ej. 8 de [11.4], resulta que sólo $n-r$ de estas ecuaciones son linealmente independientes, luego las

restantes pueden suprimirse. A las $n-r$ ecuaciones linealmente independientes se les llama *ecuaciones no paramétricas* de la variedad lineal.

EJEMPLO 2. Las ecuaciones no paramétricas de la variedad lineal del ejemplo 1 anterior se reducen a

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -2 & 7 \\ -3 & 1 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

que desarrollada nos da

$$11x_1 - 12x_2 - 5x_3 = 0.$$

A las variedades lineales de dimensión inferior en una unidad a la del espacio total, se les llama *hiperplanos*.

EJERCICIOS

1. Hállense las ecuaciones paramétricas, no paramétricas y una base de la variedad lineal engendrada por los vectores $(2, 1, -1, 0)$, $(3, 0, 1, 1)$, $(5, 1, 0, 2)$, $(1, -1, 2, 1)$, $(1, 2, -3, -1)$.

2. Ecuaciones no paramétricas de la variedad lineal engendrada por los vectores $(1, 5+i, 2+2i, 2+i)$, $(-1, 5-i, 1+2i, 0)$ y $(3, -5+3i, -2i, 2+i)$.

3. Hállense las ecuaciones no paramétricas y las paramétricas de las variedades lineales

$$L_1 = \{u_1, u_2+u_3-u_4\}, \quad L_2 = \{u_2, u_1+u_3-u_4\}, \quad (L_1 \cup L_2) \quad \text{y} \quad L_1 \cap L_2.$$

4. Hállense las ecuaciones paramétricas de la variedad lineal:

$$L \equiv \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -2x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

5. Dadas las variedades lineales

$$L_1 \equiv \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$L_2 \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

hállense las ecuaciones paramétricas y una base de $(L_1 \cup L_2)$.

6. Hállense todos los vectores que pertenecen a $L_1 \cap L_2$, siendo

$$L_1 = (1, -2, 3), \ (1, 1, 1) \quad \text{y} \quad L_2 = (0, -3, 2).$$

7. Hállense todos los vectores que pertenecen a la variedad lineal $L_1 \cap L_2$, siendo

$$L_1=(1,-1,1),\ (0,1,0) \quad \text{y} \quad L_2=(3,-5,7).$$

8. Dada la variedad lineal

$$L \equiv \begin{cases} x_1+x_2-\ x_3+4x_4=0 \\ \quad\ x_2+3x_3-\ x_4=0 \end{cases}$$

hállese una base de la misma y calcúlense las coordenadas del vector $(9,-4,1,-1)$ respecto a dicha base.

9. Hállense las ecuaciones de cambio de base en la variedad lineal $L=(1,-2,7),\ (-3,1,-9)$ respecto a las bases $(1,-2,7),\ (-3,1,-9)$ y $(3,4,-3),\ (3,-6,21)$.

12.3. Dimensión de la imagen de una aplicación lineal.

Sea $F\colon\ V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensiones finitas (m y n, respectivamente) sobre un cuerpo conmutativo K. Sean

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= \alpha_{11}\lambda_1+\ldots+\alpha_{1m}\lambda_m \\ \lambda_2' &= \alpha_{21}\lambda_1+\ldots+\alpha_{2m}\lambda_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n' &= \alpha_{n1}\lambda_1+\ldots+\alpha_{nm}\lambda_m \end{aligned}$$

las ecuaciones de dicha aplicación lineal respecto a las bases $\{u_i\}_{1\le i\le m}$ de V y $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ de V'. Los vectores columna de la matriz $(\alpha_{ij})_{n\times m}$ son los transformados mediante F de los vectores de la base $\{u_i\}_{1\le i\le m}$ y dichos transformados constituyen un sistema de generadores de la variedad lineal $F(V)$ de V', por tanto, la dimensión de esta variedad lineal será precisamente el rango de la matriz $(\alpha_{ij})_{n\times m}$.

EJEMPLO. La dimensión de $F(K^3)$, estando dada la aplicación $F\colon\ K^3 \longrightarrow K^4$ por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= 2\lambda_1+3\lambda_2+5\lambda_3 \\ \lambda_2' &= \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 \\ \lambda_3' &= 3\lambda_1+2\lambda_2+5\lambda_3 \\ \lambda_4' &= \lambda_1+3\lambda_2+4\lambda_3 \end{aligned}$$

es dos, ya que

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2.$$

EJERCICIOS

1. Dadas las aplicaciones lineales F_1 y F_2 de R^3 en R^4, mediante las ecuaciones

$$F_1 \equiv \begin{cases} \lambda_1' = 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_2' = \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_3' = \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_4' = \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 \end{cases}$$

y

$$F_2(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 1),$$
$$F_2(0, 1, 0) = (0, 1, 1, 0),$$
$$F_2(0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1).$$

Hállense las dimensiones de $F_1(R^3)$, $F_2(R_3)$ y de $[F_1+F_2](R^3)$ y el núcleo de esta última aplicación.

2. Dada la aplicación lineal F: $R^3 \longrightarrow R^2$ mediante

$$F(-2, 1, 1) = (1, 1), \quad F(1, 0, 1) = (0, 1), \quad F(2, 1, -1) = (-1, 2),$$

hállense: las dimensiones de $F(R^3)$ y del núcleo de F y una variedad complementaria del núcleo de F.

3. Hállese una base de $F(R^4)$, siendo F el endomorfismo de R^4 dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \\ \lambda_2' &= -\lambda_2 + \lambda_4 \\ \lambda_3' &= \lambda_2 + 2\lambda_3 - 3\lambda_4 \\ \lambda_4' &= \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4. \end{aligned}$$

solución a los ejercicios

CAPITULO 1

Párrafo 1.1.

1. *a)* {enero, febrero ,marzo, abril, septiembre, octubre, noviembre, diciembre}. *b)* {1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}. *c)* {*m*, *a*, *t*, *e*, *i*, *c*, *s*}. *d)* {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. *e)* {0}. *f)* ϕ.

2. No. El conjunto {0} posee un elemento y el conjunto vacío, por definición, no posee elementos.

3. *a)* $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. *b)* No se puede expresar por extensión. *c)* No se puede expresar por extensión. *d)* {rojo, anaranjado, amarillo, verde, azul, añil, violeta}. *e)* ϕ. *f)* $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.

4. Un ejemplo de conjunto que se contiene a sí mismo sería: el conjunto de todas las cosas que no son mesas.

Llamemos C a la clase de todos los conjuntos ordinarios. Sólo pueden ocurrir dos cosas: que C sea un conjunto ordinario o que C sea extraordinario. En el primer caso, $C \in C$, luego C es también extraordinario. En el segundo caso, $C \notin C$, con lo que C es ordinario.

El absurdo proviene de que se considera la totalidad de los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos, sin precisar los entes a partir de los cuales se pretende formar el conjunto. Es decir, se maneja el concepto de universo absoluto, el cual no tiene sentido.

Párrafo 1.2.

El conjunto A, de n elementos, posee un único subconjunto carente de elementos, el conjunto vacío; n subconjuntos de un solo elemento; $\binom{n}{2}$ subconjuntos de dos elementos; $\binom{n}{3}$ de tres; ...; un solo subconjunto de

n elementos, él mismo. Luego en total hay:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n$$

subconjuntos de A.

Párrafo 1.3.

1. Si

$$x\in A\cup(B\cap C)\Longrightarrow x\in A \text{ o } x\in B\cap C\Longrightarrow x\in A \text{ o, } x\in B \text{ y } x\in C\Longrightarrow x\in A\cup B \text{ y } x\in A\cup C\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

Si

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\Longrightarrow x\in A\cup B \text{ y } x\in A\cup C\Longrightarrow x\in A, \text{ o, } x\in B \text{ y } x\in C\Longrightarrow x\in A\cup(B\cap C)\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C).$$

Ambas relaciones de inclusión implican la primera propiedad.
El razonamiento para demostrar la segunda propiedad es análogo.

2. No es asociativa. En la figura 2 puede verse que $(A-B)-C=\text{II}$ y $A-(B-C)=\text{II}\cup\text{V}\cup\text{VI}$.

3. Consideremos un conjunto típico (desde el punto de vista estadístico) de 100 personas como conjunto universal y denominemos F y T a los subconjuntos de él, formados por aficionados al fútbol y a los toros, respectivamente, y nF y nT al número de elementos de cada uno de estos conjuntos. Las posiciones relativas extremas (a efectos del problema) de los conjuntos F y T son:

$$T\subset F\Longrightarrow T\cap F=T\Longrightarrow n(T\cap F)=nT=68,$$
$$\complement F\subset T\Longrightarrow T\cap F=T-\complement F\Longrightarrow n(T\cap F)=n(T-\complement F)=68-(100-72)=40.$$

Luego, el número de aficionados al fútbol y a los toros simultáneamente oscila entre el 40% y el 68%.

4. En virtud de la primera ley:

$$\complement(\complement A\cup\complement B)=\complement(\complement A)\cap\complement(\complement B)=A\cap B$$

y tomando complementarios en el primero y último miembros, sale la segunda ley de De Morgan.

5. Llamemos F y B a los conjuntos de alumnos que juegan al fútbol y al baloncesto, respectivamente, tenemos:

$$n(F\cup B)=nF+nB-n(F\cap B)\Longrightarrow n(F\cap B)=nF+nB-n(F\cup B)=$$
$$=60+50-(75-10)=45.$$

6. $\mathrm{I}=\complement(A\cup B\cup C)$; $\mathrm{II}=A-(B\cup C)$; $\mathrm{III}=(A\cap B)-C$; $\mathrm{IV}=B-(A\cup C)$; $\mathrm{V}=A\cap B\cap C$; $\mathrm{VI}=(A\cap C)-B$; $\mathrm{VII}=(B\cup C)-\mathrm{A}$; $\mathrm{VIII}=C-(A\cup B)$.

Párrafo 1.4.

1. $m\cdot n$, $n\cdot m$, m^2 y n^2, respectivamente.

2. Si $(x, y)\in(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)\Longrightarrow(x, y)\in A_1\times B_1$ y

$$(x, y)\in A_2\times B_2\Longrightarrow\begin{cases}x\in A_1\\ \text{y}\\ x\in A_2\end{cases}\text{e}\begin{cases}y\in B_1\\ \text{e}\\ y\in B_2\end{cases}\Longrightarrow x\in A_1\cap A_2$$

e $y\in B_1\cap B_2\Longrightarrow(x, y)\in(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)\subset(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2).$$

Si

$$(x, y)\in(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)\Longrightarrow x\in A_1\cap A_2\quad\text{e}$$

$$y\in B_1\cap B_2\Longrightarrow\begin{cases}x\in A_1\\ \text{y}\\ x\in A_2\end{cases}\text{e}\begin{cases}y\in B_1\\ \text{e}\\ y\in B_2\end{cases}\Longrightarrow(x, y)\in A_1\times B_1\quad\text{y}$$

$$(x, y)\in A_2\times B_2\Longrightarrow(x, y)\in(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)\subset(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)$$

y de ambas relaciones de inclusión

$$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2).$$

3. Su demostración es inmediata.

CAPITULO 2

Párrafo 2.1.

1. *a)* no es una función, puesto que para $\sqrt{2}$, por ejemplo, existen dos valores $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, tales que $(\sqrt{2}, \sqrt{2})\in R$ y $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})\in R$. *b)* sí es una función. *c)* no es una función, ya que para $x=2$ existen infinitos valores de y tales que $(2, y)\in R$. *d)* Sí es una función, pues a cada valor de x le corresponde un solo valor de $y=4-x$ tal que $(x, y)\in R$. *e)* no es una función. *f)* sí es una función. *g)* no es una función.

2. *a)* Una persona puede tener más de un hijo o no tener ninguno, luego no es una función. *b)* En un plano existen infinitas rectas paralelas a una dada, por tanto, no es una función. *c)* Por un punto fijo de un plano pasa una perpendicular y una sola a cada recta del plano, luego es función. *d)* Sí es función.

3. Son funciones las R_1, R_3, R_6.

4. Sí, es una función; su imagen es $\{x \in R | 0 \leq x < 1\}$; $F(Z) = \{0\}$.

5. No es una función definida sobre R, ya que no existe $S(0)$. Sí lo es sobre $R^* = R - \{0\}$.

6. No lo serían con la definición dada en el ejercicio, puesto que la regla dada en cada caso para calcular y, a partir de un valor dado de x, es distinta. Sí lo serían según la definición del texto, pues para un mismo valor de x obtendríamos en los dos casos el mismo valor de y.

7. $F^{-1}(B_1) = \{(x, y) | 2 \leq x \leq 3,\ y \in R\}$, es decir, una banda ilimitada del plano de anchura uno.

8. Sí, es una función. De hecho, es una transformación del plano que se conoce con el nombre de *homotecia* de centro en el origen de coordenadas y razón k.

Párrafo 2.2.

1. La función del Ej. 7 del párrafo anterior es sobreyectiva, pero no es inyectiva: $F(x, y) = F(x', y')$ no implica $(x, y) = (x', y')$, solamente $x = x'$. Al no ser inyectiva no puede ser biyectiva.

La del Ej. 8 sí es biyectiva y, por tanto, inyectiva y sobreyectiva.

2. *a)* Biyectiva. *b)* No es sobreyectiva, pues no existen valores de x tales que $F(x) = y$ cuando $y > \frac{1}{4}$; tampoco es inyectiva, ya que para todo $y < \frac{1}{4}$ existen dos valores de x tales que $F(x) = y$. *c)* Es biyectiva. *d)* Es inyectiva, pero no sobreyectiva, pues $F(x) > 0\ \forall\ x \in R$.

3. Si

$$x \in A_1 \Longrightarrow F(x) \in F(A_1) \Longrightarrow x \in F^{-1}[F(A_1)] \Longrightarrow A_1 \subset F^{-1}[F(A_1)].$$

Si

$$x \in F^{-1}[F(A_1)] \Longrightarrow F(x) \in F(A_1), \quad \text{si} \quad x \notin A_1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \exists\ x' \in A_1 | F(x') = F(x),$$

pero por ser F inyectiva $\Longrightarrow x = x'$, luego $F^{-1}[F(A_1)] \subset A_1$ y de ambas relaciones de inclusión $F^{-1}[F(A_1)] = A_1$.

4. Si

$$y \in F[F^{-1}(B_1)] \Longrightarrow \exists\ x \in F^{-1}(B_1) | F(x) = y \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y = F(x) \in B_1 \Longrightarrow F[F^{-1}(B_1)] \subset B_1.$$

Si

$$y \in B_1 \Longrightarrow$$

por ser F sobreyectiva

$$\exists\ x \in A | F(x) = y \Longrightarrow x \in F^{-1}(B_1) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y = F(x) \in F[F^{-1}(B_1)] \Longrightarrow B_1 \subset F[F^{-1}(B_1)]$$

y de ambas relaciones de inclusión

$$F[F^{-1}(B_1)] = B_1.$$

Párrafo 2.3.

1. Por ser $F\colon A \longrightarrow B$ sobreyectiva, cada elemento de B figura como segunda coordenada en al menos una pareja de la relación que define F y sólo en una pareja, por ser F inyectiva, luego la relación inversa es una función. Además, por ser F una función, todo elemento de A figura en una pareja (F^{-1} es sobreyecitva) y sólo en una (F^{-1} es inyectiva).

2. $\left\{(x, y)\,|\,0,\ x,\ y \text{ están alineados y } \overline{Oy}=\frac{1}{k}\overline{Ox}\right\}$.

3. No admiten inversa las dos primeras funciones. La inversa de $y=2x+3$ es $y=\dfrac{x-3}{2}$.

4. La F_1 y la F_4.

Párrafo 2.4.

1. Si $F\colon A \longrightarrow A$ es inyectiva, es una biyección de A en $F(A)$. Si existiese un elemento $x \in A$ tal que $x \notin F(A)$ resultaría A equipotente con uno de sus subconjuntos propios, lo que contradice a la definición de conjunto finito, luego F es sobreyectiva.

Si F es sobreyectiva, clasifiquemos A por la relación $x \sim y$ si $F(x)=F(y)$, que es, desde luego, una relación de equivalencia (Cap. 3). Sea C_x la clase de equivalencia correspondiente al elemento x. Al ser A finito todas las clases de equivalencia lo son, luego se pueden ordenar sus elementos (Capítulo 4). Definamos la siguiente función $G\colon A \longrightarrow A$ mediante $G(x)=$primer elemento de C_x. Esta función es inyectiva, luego por el razonamiento anterior es sobreyectiva, pero esto excluye el que exista una clase C_x con más de un elemento, por tanto, F es inyectiva.

2. En efecto, son equipotentes. Una biyección $F\colon N \longrightarrow Z$ sería la

$$F(n)=\begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n = \dot{2} \\ -\dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \neq \dot{2}. \end{cases}$$

3. Equivale a demostrar que el conjunto de las parejas ordenadas de números enteros (p, q) tales que m.c.d. $(p, q)=1$ y $q>0$ pueden ser dispuestos en forma de sucesión. Lo haremos de la siguiente forma: consideraremos los conjuntos de parejas ordenadas citadas tales que $|p|+q=$Cte. y cada uno de estos conjuntos los ordenaremos según los numeradores crecientes:

$$|p|+q=1 \ \ldots\ldots \ \frac{0}{1},$$

$$|p|+q=2 \ \ldots\ldots \ \frac{-1}{1}, \ \frac{1}{1},$$

$$|p|+q=3 \ \ldots\ldots \ \frac{-2}{1}, \ \frac{-1}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Luego Q es efectivamente numerable.

4. Si A es numerable tenemos $A=\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$. Si $B \subset A$, suprimiendo de A los términos que no pertenecen a B quedará una subsucesión, luego B es finito o numerable.

Párrafo 2.5.

1. Si

$$x \in \bigcup_{i \in I_1} A_i \Longrightarrow \exists\ i \in I_1 \mid x \in A_i,$$

pero como

$$I_1 \subset I_2 \Longrightarrow i \in I_2 \Longrightarrow x \in \bigcup_{i \in I_2} A_i \Longrightarrow \bigcup_{i \in I_1} A_i \subset \bigcup_{i \in I_2} A_i.$$

Si

$$x \in \bigcap_{i \in I_2} A_i \Longrightarrow x \in A_i\ \forall\ i \in I_2,$$

pero como $I_1 \subset I_2 \Longrightarrow$

$$x \in A_i\ \forall\ i \in I_1 \Longrightarrow x \in \bigcap_{i \in I_1} A_i \Longrightarrow \bigcap_{i \in I_2} A_i \subset \bigcap_{i \in I_1} A_i.$$

2. C_i es el conjunto de los puntos de la recta $x+y=i$, $i \in R$, de un plano (en el que hemos fijado un sistema de referencia cartesiano). Estas rectas son paralelas a la bisectriz del segundo cuadrante. $\bigcup_{i \in R} C_i$ es entonces el conjunto de todos los puntos del plano.

3. A_i es el conjunto de los puntos de la recta $y=ix$. Al recorrer i el conjunto R se obtienen todas las rectas del haz de vértice el origen de coordenadas. El conjunto $\bigcap_{i \in R} A_i$ se reduce a dicho origen.

Párrafo 2.6.

1. Sí, la verificación es sencilla.

2. La familia $\{C_i\}_{i \in R}$ del Ej. 2 es un recubrimiento del plano y también una partición. La familia $\{A_i\}_{i \in R}$ del Ej. 3 es un recubrimiento del plano, pero no es una partición, puesto que $A_i \cap A_j = \{(0, 0)\} \neq \phi$ para todo $i \neq j$.

3. No es una partición en general. Obsérvese que un alumno puede pertenecer a más de un curso.

4. No es un recubrimiento, pues, por ejemplo, los puntos del espacio que distan $\sqrt{2}$ del punto 0 no pertenecen a ninguna de las superficies esféricas de la familia. (Recuérdese que $\sqrt{2}$ no es racional.)

5. No es una partición, pues $(0, 0) \in A_i\ \forall\ i \in R$.

Párrafo 2.7.

1. Para que esté definida la función $G \circ F$ es necesario que el recorrido de F esté contenido en el dominio de G. Pero, naturalmente, esto no im-

plica que el recorrido de G está contenido en el dominio de F, que sería condición necesaria para $F \circ G$ estuviera definida. Por ejemplo $F(n)=n!$ es una función de N en N; $G(x)=x^2$ es una función de R sobre $R_+=\{x \in R \mid x \geq 0\}$; por tanto, $G \circ F$ está definida, ya que recorrido de $F \subset N \subset R=$dominio de G; sin embargo, $F \circ G$ no está definida, pues dominio de $F=N \not\supset R_+=$recorrido de G.

Las funciones $F(x)=2x$ y $G(x)=x^3$ tienen ambas por dominio y recorrido el conjunto de los números reales, luego están definidas $G \circ F(x)=(2x)^3=8x^3$ y $F \circ G(x)=2x^3$, pero, como se ve, son distintas.

2. Sean $F: A \longrightarrow B$ y $G: B \longrightarrow C$ dos funciones biyectivas. Por ser F inyectiva, si $x \neq y \Longrightarrow F(x) \neq F(y)$ y por ser G inyectiva $G[F(x)] \neq G[F(y)]$, luego $G \circ F$ es inyectiva. Por ser G sobreyectiva $\forall\ z \in C\ \exists\ y \in B | G(y)=z$ y por serlo $F\ \exists\ x \in A | F(x)=y$, es decir, $G[F(x)]=z$, luego $G \circ F$ es sobreyectiva. En resumen, $G \circ F$ es biyectiva.

3. Si los ejes son paralelos se obtiene una traslación y si son concurrentes un giro.

4.

a) $F_1 \circ F_2(x)=F_1[F_2(x)]=F_1\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}=F_2(x).$

b) $F_2 \circ F_3(x)=F_2[F_3(x)]=F_2(1-x)=\frac{1}{1-x}=F_4(x).$

c) $F_3 \circ F_2(x)=F_3[F_2(x)]=F_3\left(\frac{1}{x}\right)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}=F_6(x).$

d) $F_2 \circ F_4(x)=F_2[F_4(x)]=F_2\left(\frac{1}{1-x}\right)=1-x=F_3(x).$

e) $F_2 \circ F_5(x)=F_2[F_5(x)]=F_2\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x}{x-1}=F_6(x).$

f) $F_4 \circ F_5(x)=F_4[F_5(x)]=F_4\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=x=F_1(x).$

g) $F_5 \circ F_6(x)=F_5[F_6(x)]=F_5\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{\frac{1}{x-1}-1}{\frac{x}{x-1}}=\frac{1}{x}=F_2(x).$

h) $F_6 \circ F_5(x)=F_6[F_5(x)]=F_6\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1}=1-x=F_3(x).$

i) $F_3 \circ F_6(x)=F_3[F_6(x)]=F_3\left(\frac{x}{x-1}\right)=1-\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-x}=F_4(x).$

5. En virtud del Ej. 2 de este mismo párrafo, si F y G son transforma-

ciones de A, $F \circ G$ también lo es. Es fácil comprobar que la condición necesaria y suficiente para que la función $F: A \longrightarrow B$ admita inversa F^{-1} es que

$$F^{-1} \circ F(x) = x \ \forall \ x \in A \quad \text{y} \quad F \circ F^{-1}(y) = y \ \forall \ y \in B.$$

En nuestro caso:

$$(F \circ G) \circ (G^{-1} \circ F^{-1})(x) = F \circ (G \circ G^{-1})[F^{-1}(x)] = F\{G \circ G^{-1}[F^{-1}(x)]\} = \\ = F[F^{-1}(x)] = F \circ F^{-1}(x) = x,$$

$$(G^{-1} \circ F^{-1}) \circ (F \circ G)(x) = G^{-1} \circ (F^{-1} \circ F)[G(x)] = G^{-1}\{F^{-1} \circ F[G(x)]\} = \\ = G^{-1}[G(x)] = G^{-1} \circ G(x) = x.$$

CAPITULO 3

Párrafo 3.1.

1. En efecto, $a - a = 0 = 0p = \dot{p} \ \forall \ a \in Z$, luego $a \sim a$ (se cumple E_1); si $a - b = pm = \dot{p}$, se tiene que $b - a = p(-m) = \dot{p}$, es decir, si $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$ (se cumple E_2) y, por último, si $a - b = \dot{pm}$ y $b - c = \dot{pn} \Longrightarrow a - c = \dot{p(m+n)} = \dot{p}$ (se cumple E_3).

2. No se cumple E_2, ya que $A \subset B$ no implica necesariamente que $B \subset A$.

3. No se cumple E_3, puesto que de $|a-b| \leq 1$ y $|b-c| \leq 1$ no se deduce, en general, que $|a-c| \leq 1$. Por ejemplo, $2 \ R \ 3$ y $3 \ R \ 4$, pues $|2-3| = 1$ y $|3-4| = 1$, sin embargo, $2 \not R \ 4$, ya que $|2-4| = 2 > 1$.

4. No se cumple E_1, pues no es cierto en general que $a \, R \, a \ \forall \ a \in Z$, por ejemplo, para $a = 4$.

5. En el Ej. 3 se cumplen E_1 y E_2 y no se cumple E_3; en el Ej. 2 se cumplen E_1 y E_3 y no se cumple E_2 y, por último, en el Ej. 4 se cumplen E_2 y E_3 y no se cumple E_1.

6. En efecto, $a + a = 2a = \dot{2} \ \forall \ a \in Z$, luego se cumple E_1; $a + b = \dot{2} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow b + a = \dot{2} \ \forall \ a, \ b \in Z$, por lo que se cumple E_2 y $a + b = \dot{2}$ y $b + c = \dot{2} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow a + 2b + c = \dot{2} \Longrightarrow a + c = \dot{2}$, con lo que se cumple E_3.

Párrafo 3.2.

1. Es inmediato, si se tiene en cuenta que dos puntos x e y de $A - B$ están en el mismo semiplano de los determinados por la recta r o en distinto, según que el segmento de extremos x e y no corte a r. El conjunto cociente está constituido por los dos semiplanos determinados por la recta r, con exclusión de dicha recta.

2. Se ve inmediatamente que es una relación de equivalencia si se considera que una recta queda determinada por dos puntos distintos. El conjunto cociente será el haz plano de rectas de vértice O, con la exclusión de dicho punto O.

3. No, pues no se verifica E_3. En efecto, si x e y son dos puntos no alineados con $O \Longrightarrow x \sim 0$ y $0 \sim y$, a pesar de lo cual $x \not R y$.

4. La familia $\{C_x\}_{C_x \in A/R}$ es una partición de A definida por la relación de equivalencia R. En efecto, $C_x \subset A$; $\forall\ x \in A\ \exists\ C_x \in A/R$, luego la familia $\{C_x\}_{C_x \in A/R}$ es un recubrimiento de A; $C_x \neq \phi$, ya que $x \in C_x$ y, por último, de acuerdo con el teorema 2, dos clases distintas son disjuntas.

5. En efecto, $x \sim x\ \forall\ x \in A$, pues por todo punto del espacio pasa al menos una recta paralela a p (de hecho, infinitas; todas las rectas del plano paralelo a p por x, que pasan por x). Si $x \sim y$ es evidente que $y \sim x$, pues dos puntos determinan una única recta y, por último, si $x \sim y$ e $y \sim z \Longrightarrow$ $\Longrightarrow x \sim z$, pues dos rectas que pasan por un punto—el y—y son paralelas a un plano—el p—están contenidas en un plano paralelo al mismo. El conjunto cociente está constituido por todos los planos paralelos al plano p.

6. Si $x' \in C_x$, $y' \in C_y$ y $x' \sim y' \Longrightarrow y' \sim y$ y en virtud de $E_3 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow x' \sim y \Longrightarrow x' \in C_y \Longrightarrow C_x = C_y$, de acuerdo con el teorema 2.

CAPITULO 4

Párrafo 4.1.

1. En efecto, $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$, pues $ab = ba$, luego se cumple O_1; si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b} \Longrightarrow ad \leq bc$ y $cb \leq da \Longrightarrow ad = bc \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, por tanto, se cumple O_2 y, por último, si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f} \Longrightarrow ad \leq bc$ y $cf \leq de$ y como $a, b, c, d, e, f \in Z_+^*$ podemos multiplicar miembro a miembro ambas desigualdades obteniendo $adcf \leq bcde \Longrightarrow af \leq be \Longrightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$, con lo que se cumple O_3. Que esta relación de orden es total, es consecuencia de serlo también la ordenación ordinaria para el conjunto Z_+^*

2. El procedimiento primero proporciona una ordenación total; el segundo, una ordenación parcial.

3. No, pues, en general, no se cumple O_2. En efecto, 3 divide a -3 y -3 divide a 3 y, sin embargo, $3 \neq -3$.

Párrafo 4.2.

1. No tiene extremo superior. El extremo inferior es el cero.

2. El extremo inferior es el conjunto vacío y el extremo superior, el conjunto $[-1, 1]$.

3. En el primer caso es maximal el 10 y minimal el 1. En el segundo caso, es maximal el 1 y son minimales los números 6, 7, 8, 9, 10.

Párrafo 4.3.

Si C está bien ordenado y $x, y \in C$, el subconjunto $\{x, y\}$ posee un elemento mínimo, luego $x \leq y$ o $y \leq x$, por tanto, C está totalmente ordenado.

CAPITULO 5

Párrafo 5.1.

1. Vamos a demostrar el teorema por inducción sobre n, siendo $n \geq 3$. Para $n=3$, el teorema es cierto, puesto que suponemos la operación asociativa. Supongamos $n > 3$. Obsérvese que para componer n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mediante una ley de composición interna binaria, hay que proceder de la siguiente manera: se eligen un par de elementos adyacentes y se les combina; entonces, el resultado obtenido se combina con otro adyacente o se eligen dos nuevos elementos adyacentes y se combinan entre sí. En cada paso, el número total de elementos a combinar, disminuye en una unidad, luego tras un número finito de operaciones quedarán únicamente dos elementos. Supongamos que

$$A=(x_1 * \ \ldots \ * x_i) * (x_{i+1} * \ \ldots \ * x_n)$$

y

$$B=(x_1 * \ \ldots \ * x_j) * (x_{j+1} * \ \ldots \ * x_n)$$

son los resultados obtenidos al haber efectuado las combinaciones de los n elementos citados aplicando de dos maneras distintas el procedimiento anterior. Los paréntesis indican la combinación final efectuada en cada caso. Supongamos que $i \leq j$. Puesto que cada uno de los elementos finales en A y B contiene menos de n elementos, nuestra hipótesis de inducción nos permite ordenar en ellos los paréntesis a capricho. Si $i=j$ ya no habría nada que demostrar. Supongamos $i < j$, podemos escribir:

$$A=(x_1 * \ \ldots \ * x_i) * [(x_{i+1} * \ \ldots \ * x_j) * (x_{j+1} * \ \ldots \ * x_n)]$$

y

$$B=[(x_1 * \ \ldots \ * x_i) * (x_{i+1} * \ \ldots \ * x_j)] * (x_{j+1} * \ \ldots \ * x_n).$$

Si llamamos C a $x_1 * \ \ldots \ * x_i$, D a $x_{i+1} * \ \ldots \ * x_j$ y E a $x_{j+1} * \ \ldots \ * x_n$, tenemos que

$$A=C*(D*E) \quad \text{y} \quad B=(C*D)*E.$$

Puesto que C, D y E están perfectamente definidos y puesto que la ley de composición interna es asociativa, tenemos $A=B$.

2. Porque la sustracción no cumple la propiedad asociativa. Por ejemplo, $7-(5-2)=4$ y $(7-5)-2=0$.

3. No es un grupo, ya que no se cumple la propiedad III. El elemento neutro es el conjunto vacío.

4. No lo es, pues carece de elemento neutro (no cumple II).

5. Existen dos isometrías del espacio que dejan invariante un triángulo isósceles: la transformación idéntica, i, y el giro de 180° alrededor de la mediatriz del lado desigual, p; la tabla de multiplicar en este caso sería:

	i	p
i	i	p
p	p	i

Es inmediato comprobar que el conjunto $\{i, p\}$ con esta ley de composición interna es un grupo.

6. La ecuación $ax=b$ admite la solución $a^{-1}b$. En efecto, $a(a^{-1}b)=(aa^{-1})b=eb=b$. Si admitiese otra solución c, tendríamos $ac=b$; multiplicando por la izquierda ambos miembros de la igualdad anterior por a^{-1} obtenemos $a^{-1}(ac)=(a^{-1}a)c=c=a^{-1}b$. Análogamente para la otra ecuación.

Veamos el recíproco: $ax=a$ debe tener solución, sea e_1; dado un elemento $b\in G$ cualquiera la ecuación $ya=b$ tiene solución, sea ésta c, por tanto, $ca=b$, si multiplicamos $ae_1=a$ por c por la izquierda $\Longrightarrow be_1=b$. Procediendo de manera análoga se obtendría que $\exists\ e_2\in G$ tal que $\forall\ b\in G\Longrightarrow$ $\Longrightarrow e_2b=b$, con lo que $e_1=e_2e_1=e_2$. Existe, pues, elemento neutro. Dado $a\in G\ \exists\ a', a''\in G$ tales que' $aa'=a''a=e\Longrightarrow a''(aa')=a''e\Longrightarrow (a''a)a'=$ $=a''e\Longrightarrow ea'=a''e\Longrightarrow a'=a''$, luego existe el elemento simétrico de todo elemento a de G.

7. Basta multiplicar las ecuaciones $ax=ay$, $xa=ya$, respectivamente, por la izquierda y por la derecha por el inverso de a.

8. De acuerdo con la definición de elemento inverso tenemos $x^{-1}x=$ $=xx^{-1}=1$, luego el inverso del elemento x^{-1} es el x. Por otra parte, (xy) $(y^{-1}x^{-1})=x(yy^{-1})x^{-1}=xx^{-1}=1$, por tanto, el elemento inverso del xy es el $y^{-1}x^{-1}$.

9. Sean $n, m\in N$ y $n>m$.

$$x^nx^m=(x\overset{(n}{\dots}x)(x\overset{(m}{\dots}x)=x\overset{(n+m}{\dots\dots}x=x^{n+m}.$$

$$x^{-n}=(x^n)^{-1}=(x\overset{(n}{\dots}x)^{-1}=x^{-1}\overset{(n}{\dots}x^{-1}=(x^{-1})^n.$$

$$x^nx^{-m}=(x\overset{(n}{\dots}x)(x^{-1}\overset{(m}{\dots}x^{-1})=(x\overset{(n-m}{\dots\dots}x)(x\overset{(m}{\dots}xx^{-1}\overset{(m}{\dots}x^{-1})=x^{n-m}.$$

$$x^{-n}x^{-m}(x^{-1})^n(x^{-1})^m=x^{-1})^{n+m}=x^{-(n+m)}=x^{-n-m}.$$

Si $n=m\Longrightarrow x^nx^{-m}=x^0=1$.

$$(x^n)^m=x^n\overset{(m}{\dots}x^n=(x\overset{(n}{\dots}x)\overset{(m}{\dots}(x\overset{(n}{\dots}x)=x\overset{(nm}{\dots\dots}x=x^{nm}.$$

$$(x^{-n})^m=\left[(x^{-1})^n\right]^m=(x^{-1})^{nm}=x^{-nm}.$$

$$(x^n)^{-m}=\left[(x^n)^{-1}\right]^m=(x^{-n})^{-m}=x^{-nm}.$$

$$(x^{-n})^{-m}=\left[(x^{-1})^n\right]^{-m}=(x^{-1})^{-nm}=x^{-(-nm)}=x^{nm}.$$

Si G es abeliano $(xy)^n=(xy)(xy)\overset{(n}{\ldots}(xy)=(x\overset{(n}{\ldots}x)(y\overset{(n}{\ldots}y)=x^ny^n$.

En notación aditiva dichas propiedades serían:

$$nx+mx=(n+m)x, \quad n(mx)=(nm)x \ \forall \ n, \ m \in Z$$

y si G es abeliano

$$n(x+y)=nx+ny \ \forall \ x, y \in G \quad \text{y} \quad \forall \ n \in Z.$$

10. Véase el ejemplo 9 de [5.1] y el teorema 1 de [2.7].

Párrafo 5.2.

1. Sea $H \subset (Z, +)$ un subgrupo cualquiera. Si $H=\{O\} \Longrightarrow H=OZ$. Si $H \neq \{O\} \ \exists \ x \neq 0 | x \in H$, entonces $-x \in H$. De estos dos elementos, x y $-x$, uno es positivo. Sea n el menor entero positivo que pertenece a H; si $m \in H \ \exists \ q, r \in Z | m=qn+r$ con $0 \leq r < n$, pero $r=m-qn \in H$, luego, por la elección de n, r no puede ser menor que n, por tanto, tiene que ser 0. En definitiva, $m=qn$.

2. Son subgrupos el $\{i\}$ y el $\{i, p\}$.

3. En efecto, todo elemento de Z es de la forma $n1$, luego el elemento 1 es un generador del grupo. También lo sería el -1.

4. $a^na^m=a^{n+m}=a^{m+n}=a^ma^n$, luego todo grupo cíclico es abeliano. Sea H un subgrupo del grupo cíclico $G=(a)$. Si $H=\{1\}$, ya está demostrado que H es cíclico, en caso contrario $\exists \ x \neq 1 | x \in H$. Pero x tiene que ser de la forma a^n; por ser H subgrupo $a^{-n} \in H$, luego podemos garantizar que si $H \neq \{1\}$ existe $a^m \in H$ con exponente natural. Sea p el menor de los números naturales tales que $a^p \in H$; si a^m es otro elemento de $H \ \exists \ q, r \in Z |$ $m=pq+r$ con $0 \leq r < p$. Ahora bien, $a^r=a^{m-pq}=a^{m-pq} \in H$, luego, por la elección de p, r tiene que ser 0. Es decir $a^m=a^{pq}=(a^p)^q$, con lo que a^p será un generador de H.

5. Si los subgrupos H_1 y H_2 de G son normales y $x \in H_1 \cap H_2$, $gxg^{-1} \in$ $\in H_1$ y $gxg^{-1} \in H_2 \ \forall \ g \in G$, luego $gxg^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

6. Vamos a definir una biyección φ entre el conjunto de las clases por la izquierda de H en G y el conjunto de las clases por la derecha. Para ello ponemos $\varphi(aH)=Ha^{-1}$. φ es una aplicación, pues si $b \in aH \Longrightarrow a^{-1}b \in H \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow a^{-1}(b^{-1})^{-1} \in H \Longrightarrow b^{-1} \in Ha^{-1}$. Que es sobreyectiva es inmediato. También es inyectiva, pues si $\varphi(aH)=\varphi(cH) \Longrightarrow Ha^{-1}=Hc^{-1} \Longrightarrow a^{-1}(c^{-1})^{-1} \in$ $\in H \Longleftrightarrow a^{-1}c \in H \Longrightarrow aH=cH$.

7. Sean aH y bH dos clases por la izquierda distintas de H en G. Vamos a definir una biyección ψ entre ambas. Para ello ponemos $\psi(ah)=bh$. ψ es evidentemente una aplicación y sobreyectiva. Que es inyectiva es consecuencia de la propiedad de simplificación, pues si $bh=b'h \Longrightarrow b=b'$.

Párrafo 5.3.

1. Es un endomorfismo, pues

$$x \longrightarrow 2x$$
$$y \longrightarrow 2y$$
$$x+y \longrightarrow 2(x+y)=2x+2y.$$

No es un automorfismo, ya que dicha aplicación no es sobreyectiva (los números impares carecen de original).

2. No es un endomorfismo, pues

$$y \longrightarrow 2x$$
$$x \longrightarrow 2y$$
$$xy \longrightarrow 2(xy) \neq (2x)(2y).$$

3. Que la condición es necesaria es trivial, pues el cero no puede tener más que un original que, como sabemos, es el cero. Si el núcleo del homomorfismo sobre se reduce al cero, de $F(x)=F(y)$ se deduce $0=F(y)-F(x)=F(y-x) \Longrightarrow y-x=0 \Longrightarrow x=y$, luego F es inyectiva; como, por hipótesis era sobreyectiva, es biyectiva.

4. Las isometrías del triángulo equilátero son: la identidad (i); giro en su plano, alrededor de su centro de gravedad, de un ángulo de 120° (w); ídem, íd. de 240° (w^2), y los tres giros de 180° alrededor de sus tres alturas (p, q, r). Si se numeran los vértices (1, 2, 3) es fácil comprobar que a cada una de estas transformaciones corresponde una de las 6 sustituciones del grupo simétrico de grado 3.

5. Se comprueba fácilmente.

6. El conjunto de las funciones constantes.

Párrafo 5.4.

De orden 2 no hay más que uno, el cíclico. Su tabla de multiplicar es

	e	a
e	e	a
a	a	e.

Su único elemento distinto del elemento unidad e, es de orden 2.

De orden 3. Si a es un elemento de un grupo de orden 3 distinto del elemento unidad, su orden tiene que ser divisor de 3 y distinto de 1, luego tiene que ser 3. No hay, pues, más grupo de orden 3 que el cíclico:

	e	a	a^2
e	e	a	a^2
a	a	a^2	e
a^2	a^2	e	a.

De orden 4. Los órdenes de sus elementos distintos del elemento unidad tienen que ser 4 o 2. Si existe un elemento de orden 4 el grupo es el cíclico:

	e	a	a^2	a^3
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
a^2	a^2	a^3	e	a
a^3	a^3	e	a	a^2

Sean a y b dos elementos de orden 2 de G. El elemento ab tiene que ser distinto de a y de b. Veamos que el grupo es conmutativo. En efecto, ab tiene que ser tmabién de 2.º orden, luego $(ab)(ab)=e$, pero esto es lo mismo que decir que $(ab)^{-1}=ab \Longrightarrow b^{-1}a^{-1}=ba=ab$, ya que por ser a y b de orden 2, cada uno coincide con su inverso. La tabla de multiplicar sería en este caso:

	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

De orden 5. Todo elemento distinto del elemento unidad tiene que ser de orden 5, luego no hay más grupo de orden 5 que el cíclico:

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4	e	a
a^3	a^3	a^4	e	a	a^2
a^4	a^4	e	a	a^2	a^3

De orden 6. Si existe un elemento de orden 6 el grupo es el cíclico. No creemos necesario escribir su tabla de multiplicar.

Supongamos que existe un elemento a de orden 3. Sea b un elemento de G distinto de los elementos e, a y a^2. Los elementos ba, ba^2 son también distintos de e, a, a^2. En efecto:

si $ba=e \Longrightarrow b=a^2$, en contra de lo supuesto,
si $ba=a \Longrightarrow b=e$, en contra de lo supuesto,
si $ba=a^2 \Longrightarrow b=a$, en contra de lo supuesto,
si $ba^2=e \Longrightarrow b=a$, en contra de lo supuesto,
si $ba^2=a \Longrightarrow b=a^2$, en contra de lo supuesto,
si $ba^2=a^2 \Longrightarrow b=e$, en contra de lo supuesto.

Además, son distintos entre sí:

si $ba=b \Longrightarrow a=e$, lo que no es cierto,
si $ba=ba^2 \Longrightarrow b=ba$, lo que no es cierto,
si $ba^2=b \Longrightarrow b=ba$, lo que no es cierto.

Entonces los 6 elementos del grupo son e, a, a^2, b, ba y ba^2.

Los elementos b, ba y ba^2 son de orden 2. En efecto,

$b^2 \neq b$, pues en caso contrario sería $b = e$,
$b^2 \neq ba$, pues en caso contrario sería $b = a$,
$b^2 \neq ba^2$, pues en caso contrario sería $b = a^2$,
$b^2 \neq a$, pues en caso contrario sería $b^3 = ba$, $b^4 = a^2$, $b^5 = ba^2$, $b^6 = a^3 = e$

y tendríamos un elemento de orden 6 y el grupo sería el cíclico, contra lo supuesto.

$b^2 \neq a^2$. Se razonaría de manera análoga al caso anterior.

No queda más posibilidad que $b^2 = e$, luego b es de orden 2.

$$(ba)^2 = (ba)(ba) = b(ab)a.$$

Necesitamos calcular ab.

$ab \neq e$, pues en caso contrario tendríamos $a = b$, ya que $b^{-1} = b$,
$ab \neq b$, pues en caso contrario tendríamos $a = e$,
$ab \neq ba$, pues en caso contrario tendríamos $(ba)^2 = (ba)(ba) = b(ab)a = b(ba)a = b^2a^2 = a^2$, $(ba)^3 = (ba)(ba)^2 = (ba)a^2 = ba^3 = b$, $(ba)^4 = a^2a^2 = a$, $(ba)^5 = (ba)(ba)^4 = (ba)a = ba^2$, $(ba)^6 = (ba)(ba)^5 = (ba)(ba)^2 = (ab)(ba^2) = ab^2a^2 = e$, luego el elemento ba sería de orden 6, contra la hipótesis.
$ab \neq a$, pues en caso contrario sería $b = e$,
$ab \neq a^2$, pues en caso contrario sería $b = a$,

luego sólo queda la posibilidad de que $ab = ba^2$. Entonces:

$$(ba)^2 = (ba)(ba) = b(ab)a = b(ba^2)a = b^2a^3 = e$$

y, por tanto, ba es de orden 2.

$$(ba^2)^2 = (ba^2)(ba^2) = (ba)(ab)a^2 = (ba)(ba^2)a^2 = b(ab)a = b(ba^2)a = b^2a^3 = e,$$

luego ba^2 es también de orden 2.

La tabla de multiplicar de este grupo de orden 6 sería:

	e	a	a^2	b	ba	ba^2
e	e	a	a^2	b	ba	ba^2
a	a	a^2	e	ba^2	b	ba
a^2	a^2	e	a	ba	ba^2	b
b	b	ba	ba^2	e	a	a^2
ba	ba	ba^2	b	a^2	e	a
ba^2	ba^2	b	ba	a	a^2	e

Ya no queda más posibilidad que todos los elementos del grupo, salvo el elemento unidad, sean de orden 2. Supongamos que a y b son elementos de orden 2 de G, así como $c = ab$, entonces estos tres elementos y el elemento unidad constituyen un grupo de orden 4 (véase la discusión para

los grupos de orden 4), que sería subgrupo del grupo de orden 6, pero esto no es posible, pues 4 no divide a 6.

2. Supongamos que los elementos del grupo son $a_1, a_2, \ldots, a_n$, es decir, el grupo es de orden n. Los n productos $a_i a_j$, donde a_i es un elemento fijo y $j=1, 2, \ldots, n$ (a_j es fijo e $i=1, 2, \ldots, n$) son distintos, pues si $a_i a_j = a_i a_k \Longrightarrow$ $\Longrightarrow a_j = a_k$ ($a_i a_j = a_k a_j \Longrightarrow a_i = a_k$), de acuerdo con nuestras hipótesis. Entonces las ecuaciones $a_i x = a_k$ e $y a_i = a_k$ tienen, cada una, solución única. Se cumplen las hipótesis del Ej. 6 de [5.1], luego G, con la ley de composición citada, es un grupo.

3. Sea $G=(a)$ un grupo cíclico, del cual a es un generador. La aplicación φ: $Z \longrightarrow G$ dada por $\varphi(n)=a^n$ es un homomorfismo. En efecto, $\varphi(m+n)=a^{m+n}=a^m a^n=\varphi(m)\varphi(n)$. Pueden ocurrir dos cosas: 1.º, que núcleo de $\varphi=\{0\}$; entonces si $m \neq n \Longrightarrow a^m \neq a^n$, pues en caso contrario $a^{m-n}=0$ y $m-n \neq 0$ pertenecería al núcleo de φ, contra lo supuesto. 2.º, que núcleo de $\varphi \neq \{0\}$, entonces como el núcleo de un homomorfismo es un subgrupo del grupo original, núcleo de $\varphi = nZ$ (Ej. 1 de [5.2]) y de acuerdo con el teorema 6 de [5.3], Z/nZ es isomorfo a G, luego G tiene n elementos. La propiedad transitiva de la relación de isomorfía garantiza que grupos cíclicos de igual orden son isomorfos.

4. Sea $G=(a)$ un grupo cíclico de orden n. Si m y n son primos entre sí, entonces el elemento a^m es de orden n. En efecto, $(a^m)^n=a^{mn}=(a^n)^m=$ $=e^m=e$ y si $(a^m)^p=e \Longrightarrow n|mp \Longrightarrow n|p$, por ser n y m primos entre sí.

Si $h|n \Longrightarrow$ orden de $a^h < n$. En efecto, $n=kh \Longrightarrow (a^h)^k=a^{hk}=a^n=e$.

En resumen, si m.c.d. $(m, n)=1$ el elemento a^m engendra todo el grupo G; si $m|n$, el elemento a^m engendra un subgrupo propio de G.

5. Todo elemento de G tiene por orden un divisor de p, pero al ser éste primo, tiene que coincidir con p.

CAPITULO 6

Párrafo 6.1.

1. Si en el conjunto $R \times R$ definimos las operaciones

$$(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2),$$
$$(a_1, a_2)(b_1, b_2)=(a_1 b_1, a_1 b_2)$$

es fácil comprobar que con estas operaciones dicho conjunto es un anillo. El elemento $(1, y)$ es unidad por la izquierda de todo elemento de dicho anillo. En efecto,

$$(1, y)(a_1, a_2)=(1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2)=(a_1, a_2).$$

Luego existen infinitas unidades por la izquierda. Si a_1 es distinto de cero, el elemento $\left(1, \dfrac{a_2}{a_1}\right)$ es la única unidad por la derecha de (a_1, a_2).

2.

$$(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x^2+xy+yx+y^2.$$

Si A es conmutativo $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow xy=yx \ \forall \ x, y \in A \Longrightarrow (x+y)^2=x^2+2xy+y^2.$$

Recíprocamente, si

$$\forall \ x, y \in A \quad \text{es} \quad x^2+xy+yx+y^2=x^2+2xy+y^2,$$

en virtud de la propiedad de simplificación correspondiente a la adición en el anillo

$$\Longrightarrow xy=yx \ \forall \ x, y \in A,$$

es decir, A es conmutativo.

3. Que es grupo abeliano respecto a la operación $+$ es consecuencia inmediata de serlo R con respecto a dicha operación. Véase que la ley $\cdot$ es asociativa:

$$[(x_1, x_2)(y_1, y_2)](z_1, z_2)=(x_1y_1-x_2y_2, x_1y_2+x_2y_1)(z_1, z_2)=(x_1y_1z_1-x_2y_2z_1-x_1y_2z_2-x_2y_1z_2, x_1y_1z_2-x_2y_2z_2+x_1y_2z_1+x_2y_1z_1)=(x_1y_1z_1-x_1y_2z_2-x_2y_1z_2-x_2y_2z_1, x_1y_1z_2+x_1y_2z_1+x_2y_1z_1-x_2y_2z_2)=(x_1, y_1)(y_1, y_2)(z_1, z_2),$$

por ser $(R, +, \cdot)$ un cuerpo. Comprobemos la propiedad distributiva:

$$(x_1, x_2)[(y_1, y_2)+(z_1, z_2)]=(x_1, x_2)(y_1+z_1, y_2+z_2)=(x_1y_1+x_1z_1-x_2y_2-x_2z_2, x_1y_2+x_1z_2+x_2y_1+x_2z_1)=(x_1y_1-x_2y_2+x_1z_1-x_2z_2, x_1y_2+x_2y_1+x_1z_2+x_2z_1)=$$
$$=(x_1y_1-x_2y_2, x_1y_2+x_2y_1)+(x_1z_1-x_2z_2, x_1z_2+x_2z_1)=(x_1, x_2)(y_1, y_2)+$$
$$+(x_1, x_2)(z_1, z_2).$$

No es necesario comprobar la propiedad distributiva por la derecha, ya que la multiplicación definida es conmutativa, como consecuencia inmediata de serlo en R. Así, pues, A es un anillo conmutativo. Es unitario, siendo su elemento unidad el $(1, 0)$: $(x_1, x_2)(1, 0)=(x_1, x_2)$. Todo elemento (x_1, x_2) distinto de cero posee elemento inverso, el

$$\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}, \frac{-x_1}{x_1^2+x_2^2}\right),$$

luego A es un cuerpo. Como consecuencia de ser un cuerpo no posee divisores de cero.

4. Sea D un dominio de integridad cuyos n elementos son $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Los n productos a_ia_j ($a_i \neq 0$ y $j=1, 2, \ldots, n$) son todos distintos. En efecto, si $a_ia_j=a_ia_k \Longrightarrow a_ia_j-a_ia_k=a_i(a_j-a_k)=0 \Longrightarrow a_j-a_k=0$, pues D no posee divisores de cero ,luego $a_j=a_k$. Entonces, si $a_i \neq 0$ la ecuación $a_ix=a_j$ posee solución única. Ya no queda más que aplicar el Ej. 6 de [5.1] al conjunto $D-\{0\}$ con la multiplicación.

5. Los homomorfismos σ y φ son divisores de cero:

$$\begin{array}{ll} i \xrightarrow{\sigma} i & i \xrightarrow{\varphi} i \\ p \to i & p \to p \\ q \to r & q \to p \\ r \to r & r \to i \end{array}$$

en efecto,

$$\begin{array}{l} i \xrightarrow{\sigma\circ\varphi} i \\ p \to i \\ q \to i \\ r \to i. \end{array}$$

Párrafo 6.2. pag 63

1. La primera condición ($x-y \in B \ \forall \ x, y \in B$) implica que B es un subgrupo del grupo aditivo de lcuerpo K. La segunda ($xy^{-1} \in B \ \forall \ x, y \in B$) implica que $B-\{0\}$ es un subgrupo del grupo multiplicativo $(K-\{0\}, \cdot)$.

2. Aplicando el resultado del ejercicio anterior: si $a, b, c, d \in Q \Longrightarrow$ $(a+b\sqrt{2})$ y $(c+d\sqrt{2})$ pertenecen al conjunto citado, al que llamaremos B y $(a+b\sqrt{2})-(c+d\sqrt{2})=(a-c)+(b-d)\sqrt{2} \in B$ y $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})^{-1}=$

$$=(a+b\sqrt{2})\left(\frac{c}{c^2-2d^2}+\frac{-d}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\right)=\left(\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\right)\in B.$$

3. Sea B un subcuerpo de R. Veamos que todo $\frac{p}{q} \in Q$ $(p, q \in Z, q \neq 0)$. Por ser B un subcuerpo de R,

$$1 \in B, \ 1+1+\overset{(p}{\ldots}+1=p\cdot 1=p \in B,$$

análogamente,

$$q=1+1+\overset{(q}{\ldots}+1 \in B \Longrightarrow q^{-1} \in B,$$

luego, en resumen,

$$pq^{-1}=\frac{p}{q} \in B.$$

4.

$$F(x+y)=2(x+y)=2x+2y=F(x)+F(y),$$

luego F es un endomorfismo del grupo aditivo de los enteros.

$$F(xy)=2(xy) \neq 2x\cdot 2y=F(x)F(y)$$

y, por tanto, F no es un endomorfismo del anillo Z.

5. En efecto, sea $I \subset K$ un ideal distinto de $\{0\}$, entonces $\exists \ a \in I | a \neq 0$, luego

$$a^{-1}a=1 \in I \Longrightarrow \forall \ x \in K, \quad x=x\cdot 1 \in I,$$

luego

$$K \subset I \Longrightarrow I=K.$$

6. Un ejemplo muy sencillo de homomorfismo entre anillos en el que la imagen del elemento unidad del primer anillo no es el elemento unidad del segundo, es el homomorfismo cero θ: $A \longrightarrow A'$ dado por $\theta(x)=0\ \forall\ x \in A$.

$$F(x)\cdot 1' = F(x) = F(x\cdot 1) = F(x)F(1) \Longrightarrow F(x)\cdot 1' - F(x)F(1) = \\ = F(x)[1' - F(1)] = 0$$

y por ser A' un dominio de integridad, no tiene divisores de cero, luego si no se ha tomado x tal que $F(x)=0$, tendremos $1'-F(1)=0 \Longrightarrow F(1)=1'$.

7. La condición necesaria es inmediata, pues el único original del cero del segundo anillo sería el cero del primero. Si $\varphi(x)=\varphi(y) \Longrightarrow \varphi(x)-\varphi(y)=\varphi(x-y)=0 \Longrightarrow$ (si suponemos que el núcleo de $\varphi=\{0\}$) $x-y=0 \Longrightarrow x=y$, luego φ es un homomorfismo inyectivo, como por hipótesis es sobreyectivo, es biyectivo. Queda así demostrado que la condición es suficiente.

Párrafo 6.3.

1. Si n no es primo $n=pq$. Entonces $\bar{p}$, $\bar{q} \in Z$ y $\bar{p} \neq 0$, $\bar{q} \neq 0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \bar{p}\bar{q}=$resto de la división de pq por $n=\bar{0}$, luego $\bar{p}$ y $\bar{q}$ son divisores de cero del anillo Z/nZ y éste no puede ser un cuerpo.

Si n es primo y $\bar{m} \in Z/nZ \Longrightarrow$ m.c.d. $(n, m)=1$ luego $\exists\ p, q \in Z | pn+qm=1$. Tomando restos módulo n en ambos miembros de esta igualdad:

$$\bar{0}+\bar{q}\bar{m}=\mathrm{I} \Longrightarrow \bar{q}\bar{m}=\mathrm{I},$$

luego $\bar{q}$ es el inverso del elemento $\bar{m}$. (Hay que suponer, naturalmente, que $\bar{m} \neq \bar{0}$.)

2. Todos los ideales del anillo $(Z, +, \cdot)$ son de la forma $nZ=\{x \in Z | x=\dot{n}\}$. En efecto, ante todo un ideal es un subgrupo del grupo aditivo del anillo y se vio en el Ej. 1 de [5.2] que los subgrupos del grupo $(Z, +)$ eran de la forma nZ. Además, si $m \in nZ$ y $k \in Z \Longrightarrow m=\dot{n}$ y $km=\dot{n}$, luego $km \in nZ$.

El ideal $nZ \cap mZ$ tiene, pues, que ser de la forma dZ, pero entonces $d \in nZ$ y $d \in mZ \Longleftrightarrow n|d$ y $m|d$, es decir, d es un múltiplo común a n y a m. Además, si $n|p$ y $m|p \Longrightarrow p \in nZ$ y $p \in mZ \Longrightarrow p \in dZ \Longrightarrow d|p$, es decir, d divide a todo múltiplo común a n y a m, es, por tanto, el mínimo común múltiplo de n y m.

3. Obsérvese que $nZ \subset mZ \Longrightarrow m|n$. En efecto, $n \in Z \Longrightarrow n \in mZ \Rightarrow$ $\Longrightarrow n=\dot{m}$. Por tanto, lós ideales maximales pZ de $(Z, +, \cdot)$ son aquellos en los que p es primo.

4. Si I es maximal y $a \in A$, $a \notin I$, entonces el ideal (I, a) engendrado por I y por el elemento a coincide con A y además el elemento $a+I$ del anillo cociente A/I no es el cero de dicho anillo. Los elementos de (I, a) son de la forma $i+ar$, donde $i \in I$, $r \in A$, luego $1=i+ar$. El elemento $r+I$ de A/I es el inverso del $a+I$. En efecto, $(a+I)(r+I)=ar+I=(1-i)+I=$ $=1+I$. Hemos demostrado que todo elemento distinto de cero del anillo cociente A/I posee inverso, luego dicho anillo es un cuerpo.

Recíprocamente, si A/I es un cuerpo $\forall\ a \notin I\ \exists\ r \in A | (a+I)(r+I)=$

$=1+I \Longrightarrow ar=1+i \Longrightarrow 1=ar-i$, luego si $a \notin I \Longrightarrow (I,\ a)=R$, puesto que $1 \in (I,\ a)$.

Párrafo 6.4. pag 67

1. En primer lugar, la condición necesaria y suficiente para que dos elementos a y b del anillo euclídeo A sean asociados es que $\varphi(a)=\varphi(b)$. Condición necesaria: si a y b son asociados $a|b$ y $b|a \Longrightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$ y $\varphi(b) \leq \varphi(a) \Longrightarrow \varphi(a)=\varphi(b)$. Condición suficiente: si $a|b$ y $\varphi(a)=\varphi(b)$ se tiene que $a=bq+r \Longrightarrow r=a-bq$, luego como $a|b \Longrightarrow a|r \Longrightarrow \varphi(a) \leq \varphi(r)$; pero $\varphi(r) < \varphi(b)=\varphi(a)$, por tanto, $r=0$ y $a=bq \Longrightarrow b|a$, con lo que a y b son asociados.

Si x es un elemento inversible $\Longrightarrow x$ y 1 son asociados $\Longrightarrow \varphi(x)=\varphi(1)$, como consecuencia de lo anterior.

Demostración del teorema. Sea a un elemento no inversible de A, luego $\varphi(a) \neq \varphi(1)$. Supongamos que se verifica la propiedad definidora 1 de los dominios de factorización única para todo b tal que $\varphi(b) < \varphi(a)$ y vamos a probarlo para a. Si a es irreducible, ya está probado. Si no lo es, $a=cd$, donde ni c ni d son asociados de a, por tanto, $\varphi(c) < \varphi(a)$ y $\varphi(d) < \varphi(a)$. Entonces, por la hipótesis de inducción, c y d son productos de un número finito de factores irreducibles, luego $a=cd$ también lo será.

Supongamos ahora que a admite dos descomposiciones en producto de factores irreducibles,

$$a=p_1p_2 \ \dots \ p_n=q_1q_2 \ \dots \ q_m.$$

Tenemos que $p_1|q_1q_2 \ \dots \ q_m$, luego (véase la consecuencia del problema siguiente) p_1 tiene que dividir a algún q_i, pero al ser p_1 y q_i irreducibles, tienen que ser asociados, por tanto, $q_i=h_ip_1$, siendo h_i un elemento inversible de A. Entonces $p_1p_2 \ \dots \ p_n=h_1p_1q_1q_2 \ \dots \ q_{i-1}q_{i+1} \ \dots \ q_m$, de donde $p_2 \ \dots \ p_n=h_1q_2 \ \dots \ q_m$. Se repite el razonamiento con p_2 y, tras un número finito de pasos, llegaríamos a obtener 1 en el primer miembro, lo que obliga a que $m \leq n$, puesto que las q_i no son inversibles. Análogamente se demostraría que $n \leq m$, luego $m=n$.

2. Por ser $(x,\ y)=1 \ \exists \ h, k \in A | hx+ky=1 \Longrightarrow hxz+kyz=z$, pero $x|hxz$ y $x|kyz \Longrightarrow x|z$.

Como consecuencia de esta propiedad, si p es un elemento irreducible de un anillo euclídeo y $p|xy \Longrightarrow p|x$ o $p|y$.

3. Es evidente que $a|a$, luego se cumple E_1; si $a|b$ y $b|a \Longrightarrow b|a$ y $a|b$, y se cumple E_2 y, por último, si $a|b$ y $b|a$ y $b|c$ y $c|b \Longrightarrow a|c$ y $c|a$, con lo que se cumple E_3.

4. Sean (x) e (y) los ideales de A engendrados por los elementos x e y, respectivamente. El ideal $(x) \cap (y)$ es también principal, puesto que, por hipótesis, A es euclídeo. Supongamos que es m el elemento que engendra a dicho ideal intersección de los ideales (x) e (y). Un razonamiento análogo al empleado en el Ej. 2 de [6.3] completa la demosración.

Párrafo 6.5. pag 69

1. Puede ocurrir. Si $P=a_nx^n+\dots+a_0$ y $Q=b_mx^m+\dots+b_0$, puede ocurrir que a_n y b_m sean divisores de cero en A y $a_nb_m=0$.

2. Se ha demostrado ya que $A[x]$ es un anillo conmutativo con elemento unidad; bastará, pues, demostrar que $A[x]$ no tiene divisores de cero, lo que es inmediato, pues si son P y Q dos polinomios cualesquiera, no nulos, su producto es un polinomio de grado $\partial(P)+\partial(Q)$, ya que A es un dominio de integridad. Por tanto, el polinomio PQ no es el polinomio nulo.

Este resultado debería haberse utilizado en el corolario 1.

3.

$$P+Q=(\bar{3}+\bar{1})+(\bar{2}+\bar{5})x+\bar{3}x^2+x^3-\bar{4}x^4=\bar{4}+x+\bar{3}x^2+x^3+\bar{2}x^4.$$

$$PQ=\bar{3}+(\bar{3}\cdot\bar{5}+\bar{2})x+(\bar{2}\cdot\bar{5}+\bar{3})x^2+(\bar{3}\cdot\bar{5}+\bar{3}\cdot\bar{1})x^3+(\bar{2}\cdot\bar{1}-\bar{3}\cdot\bar{4})x^4+$$
$$+(\bar{3}\cdot\bar{1}-\bar{2}\cdot\bar{4})x^5-\bar{3}\cdot\bar{4}x^6=\bar{3}+\bar{5}x+x^2+\bar{2}x^4+x^5.$$

4. Un polinomio de grado n sobre el cuerpo $Z/5Z$ tiene $n+1$ coeficientes pertenecientes a dicho cuerpo y el coeficiente del término de mayor grado grado tiene que ser distinto de cero. Teniendo esto en cuenta y puesto que el citado cuerpo sólo tiene 5 elementos, el número de polinomios que se pueden formar será:

$$V'_{5,n+1}-V'_{5,n}=5^{n+1}-5^n=5^n\cdot 4.$$

5. El número de polinomios de segundo grado sobre el cuerpo $Z/3Z$ con coeficiente del término de mayor grado igual a 1 es $V'_{3,2}$. Los polinomios de segundo grado sobre dicho cuerpo reducibles son los que poseen raíces en el mismo, luego el número de ellos será $C'_{3,2}$. Por tanto, el número de polinomios irreducibles = número de polinomios − número de polinomios reducibles $=V'_{3,2}-C'_{3,2}=3^2-\dfrac{4!}{2!2!}=9-6=3.$

6. Aplicando el algoritmo de Euclides se obtiene:

$$\text{m.c.d. } (P,\ Q)=2x^2-1.$$

7. Si el polinomio $P(x)=\bar{2}x^2+x+\bar{1}$ fuese reducible, se descompondría en producto de dos factores lineales, lo que equivaldría a que dicho polinomio tuviese raíces en el cuerpo $Z/3Z$. Ahora bien, $P(\bar{0})=\bar{1}$, $P(\bar{1})=\bar{1}$ y $P(\bar{2})=\bar{2}$.

$$\bar{2}x^2+\bar{5}x+\bar{2}=(x-\bar{3})(\bar{2}x+\bar{4}).$$

8. Si $I\subset K[x]$ es un ideal y $a\in K$, $a\in I \Rightarrow 1=a^{-1}a\in I \Rightarrow \forall P(x)\in K[x]\Rightarrow P(x)=P(x)\cdot 1\in I\Rightarrow K[x]\subset I\Rightarrow I=K[x]$.

CAPITULO 7.

Párrafo 7.1.

1. Basta apoyarse en la congruencia de los dos triángulos en que una diagonal cualquiera divide a un paralelogramo.

2. Si $\alpha x+\beta y=\gamma x+\delta y \Rightarrow (\alpha-\gamma)x=(\delta-\beta)y$ y, puesto que ni x ni y son nulos $\Rightarrow \alpha-\gamma=0$ y $\delta-\beta=0\Rightarrow \alpha=\gamma$ y $\beta=\delta$.

3. Si nombramos los vértices circularmente A, B, C, D, el enunciado se traduce así:

$$\{\overrightarrow{AB}\} = \{\overrightarrow{DC}\} \Longrightarrow \{\overrightarrow{BC}\} = \{\overrightarrow{AD}\};$$

y, en efecto,

$$\{\overrightarrow{AC}\} = \{\overrightarrow{AD}\} + \{\overrightarrow{DC}\} = \{\overrightarrow{AB}\} + \{\overrightarrow{BC}\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \{\overrightarrow{AD}\} + \{\overrightarrow{DC}\} = \{\overrightarrow{DC}\} + \{\overrightarrow{BC}\} \Longrightarrow \{\overrightarrow{AD}\} = \{\overrightarrow{BC}\},$$

ya que estamos operando en un grupo abeliano.

4. Sea el paralelogramo $ABCD$, con $\{\overrightarrow{AB}\} = \{\overrightarrow{DC}\}$. Sea M el punto medio del segmento BD y consideremos vectores $\{\overrightarrow{AM}\}$ y $\{\overrightarrow{MC}\}$. Puesto que M es el punto medio del segmento BD, $\{\overrightarrow{BM}\} = \{\overrightarrow{MD}\}$. Ahora bien:

$$\{\overrightarrow{AM}\} = \{\overrightarrow{AB}\} + \{\overrightarrow{BM}\}, \quad \{\overrightarrow{MC}\} = \{\overrightarrow{MD}\} + \{\overrightarrow{DC}\} \quad \text{y} \quad \{\overrightarrow{AB}\} = \{\overrightarrow{DC}\}.$$

Entonces $\{\overrightarrow{AM}\} = \{\overrightarrow{MC}\}$. Por tanto, $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{MC}$ tienen la misma dirección y un punto común, luego deben estar sobre la misma recta y M tiene que ser el punto medio del segmento AC.

5. Si $(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}),\ (\gamma\mathbf{x}+\delta\mathbf{y}) \in L \Longrightarrow (\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) - (\gamma\mathbf{x}+\delta\mathbf{y}) = (\alpha-\gamma)\mathbf{x} + (\beta-\delta)\mathbf{y} \in L$. Es infinito, pues si $n, m \in R$, $n \neq m \Longrightarrow n\mathbf{x}+n\mathbf{y} \neq m\mathbf{x}+m\mathbf{y}$, como consecuencia del Ej. 2 de este mismo párrafo.

Es estable respecto a la ley de composición externa, pues

$$\lambda(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = (\lambda\alpha)\mathbf{x} + (\lambda\beta)\mathbf{y} \in L \ \forall\ \lambda \in R.$$

6. Se resuelve el sistema

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{12}\mathbf{u}_2 + a_{13}\mathbf{u}_3\\ \mathbf{v}_2 &= a_{21}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + a_{23}\mathbf{u}_3\\ \mathbf{v}_3 &= a_{31}\mathbf{u}_1 + a_{32}\mathbf{u}_2 + a_{33}\mathbf{u}_3\end{aligned}$$

con respecto a las $\mathbf{u}_i$ (ya se verá cómo en el capítulo 11) y tendremos

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^{3} c_{ij}\mathbf{v}_j$$

(Esto es siempre posible por ser los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ linealmente independientes.) Entonces

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} b_i\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{3} b_i\left(\sum_{j=1}^{3} c_{ij}\mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} b_i c_{ij}\right)\mathbf{v}_j.$$

7.

$$\{\overrightarrow{OB}\} = \{\overrightarrow{OC}\} + \{\overrightarrow{CB}\} \Longrightarrow \{\overrightarrow{CB}\} = \{\overrightarrow{OB}\} - \{\overrightarrow{OC}\}$$

y

$$\{\overrightarrow{OB}\}=\{\overrightarrow{OA}\}+\{\overrightarrow{AB}\}\Longrightarrow\{\overrightarrow{AB}\}=\{\overrightarrow{OB}\}-\{\overrightarrow{OA}\},$$

pero

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\alpha}{\beta},$$

por tanto,

$$\beta\overline{AB}=\alpha\overline{BC},$$

$$\beta\{\overrightarrow{AB}\}-\alpha\{\overrightarrow{BC}\}=0\quad\text{o}\quad\beta\{\overrightarrow{AB}\}+\alpha\{\overrightarrow{CB}\}=0\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\beta(\{\overrightarrow{OB}\}-\{\overrightarrow{OA}\})+\alpha(\{\overrightarrow{OB}\}-\{\overrightarrow{OC}\})=0,$$

es decir,

$$\{\overrightarrow{OB}\}=\frac{\beta\{\overrightarrow{OA}\}+\alpha\{\overrightarrow{OC}\}}{\alpha+\beta}$$

8. Se trata de resolver un triángulo del que se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. El rumbo del avión debe formar 3º 22′ 41″ 31 con la dirección NS, estando contado este ángulo en sentido contrario a las agujas de un reloj. La velocidad es 634,31 Km/h.

Párrafo 7.2.

1. Es evidente que si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \in L(A)$. Ahora bien, el conjunto L de elementos de este tipo es ya una variedad lineal, pues

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i+\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\mu_i)x_i\in L$$

(algunos coeficientes pueden ser nulos)

y

$$\alpha\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=\sum_{i=1}^{n}(\alpha\lambda_i)x_i\in L\ \forall\ \alpha\in K,$$

y es ciertamente la mínima variedad lineal que contiene a A, luego

$$L=L(A).$$

2.

$$\forall\ x\in L_1+L_2\Longrightarrow x=x_1+x_2,\ x_1\in L_1,\ x_2\in L_2\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x\in L(L_1\cup L_2)\Longrightarrow L_1+L_2\subset L(L_1\cup L_2).$$

Por otra parte,

$$\forall\ y \in L(L_1 \cup L_2) \Longrightarrow y=\lambda x_1+\mu x_2,\ x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2\ \lambda, \mu \in K \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \lambda x_1 \in L_1,\ \mu x_2 \in L_2 \Longrightarrow y \in L_1+L_2 \Longrightarrow L(L_1 \cup L_2) \subset L_1+L_2.$$

Y de ambas inclusiones se deduce

$$L_1+L_2=L(L_1 \cup L_2).$$

3. R e iR (conjunto de los números reales y el de los imaginarios). En efecto, $R+iR=C$ y $R \cap iR=\{0\}$.

4. Si

$$x=x_1+x_2=y_1+y_2$$

con

$$x_1, y_1 \in L_1 \text{ y } x_2, y_2 \in L_2 \Longrightarrow x_1-y_1=y_2-x_2,$$

pero

$$x_1-y_1 \in L_1 \text{ e } y_2-x_2 \in L_2 \Longrightarrow (x_1-y_1),\ (y_2-x_2) \in L_1 \cap L_2=\{0\} \Longrightarrow$$
$$x_1-y_1=y_2-x_2=0 \Longrightarrow x_1=y_1 \text{ y } x_2=y_2.$$

El recíproco también es cierto: Si todo $x \in V$ se puede expresar de manera única como suma de un elemento de L_1 y otro de $L_2 \Longrightarrow V=L_1 \oplus L_2$. No queda por demostrar más que $L_1 \cap L_2=\{0\}$, pero esto es inmediato, pues si $x \neq 0$ y $x \in L_1 \cap L_2 \Longrightarrow x \in L_1$ y $x \in L_2$ con lo que $x=x+0=0+x$, admitiría dos expresiones como suma de elementos de L_1 y L_2.

5. Hay que comprobar que respecto + forma grupo abeliano, y que la ley externa verifica las propiedades que definen un espacio vectorial. Veámoslo:

$$[(x_1,\ x_2)+(y_1,\ y_2)]+(z_1,\ z_2)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2)+(z_1,\ z_2)=$$
$$=[(x_1+y_1)+z_1,\ (x_2+y_2)+z_2]=[x_1+(y_1+z_1),\ x_2+(y_2+z_2)]=$$
$$=(x_1,\ x_2)+(y_1+z_1,\ y_2+z_2)=(x_1,\ x_2)+[(y_1,\ y_2)+(z_1,\ z_2)],$$

luego la ley + es asociativa;

$$(x_1,\ x_2)+(0,\ 0)=(0,\ 0)+(x_1,\ x_2)=(x_1,\ x_2),\ \forall\ x_1 \in V_1 \text{ y } \forall\ x_2 \in V_2,$$

luego existe elemento neutro; además,

$$\forall\ x_1 \in V_1 \text{ y } \forall\ x_2 \in V_2\ (x_1,\ x_2)+(-x_1,\ -x_2)=(-x_1,\ -x_2)+(x_1,\ x_2)=(0,\ 0),$$

luego existe el opuesto $\forall\ (x_1,\ x_2) \in V_1 \times V_2$. En definitiva, forma grupo, que es abeliano, pues:

$$(x_1,\ x_2)+(y_1,\ y_2)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2)=(y_1+x_1,\ y_2+x_2)=(y_1,\ y_2)+(x_1,\ x_2).$$

Veamos la segunda parte:

$$\lambda[(x_1,\ x_2)+(y_1,\ y_2)]=\lambda(x_1+y_1,\ x_2+y_2)=[\lambda(x_1+y_1),\ \lambda(x_2+y_2)]=$$
$$=(\lambda x_1+\lambda y_1,\ \lambda x_2+\lambda y_2)=(\lambda x_1,\ \lambda x_2)+(\lambda y_1,\ \lambda y_2)=\lambda(x_1,\ x_2)+\lambda(y_1,\ y_2);$$
$$(\lambda+\mu)(x_1,\ x_2)=[(\lambda+\mu)x_1,\ (\lambda+\mu)x_2]=(\lambda x_1+\mu x_1,\ \lambda x_2+\mu x_2)=$$
$$=(\lambda x_1,\ \lambda x_2)+(\mu x_1,\ \mu x_2)=\lambda(x_1,\ x_2)+\mu(x_1,\ x_2);\ \lambda[\mu(x_1,\ x_2)]=$$
$$=\lambda(\mu x_1,\ \mu x_2)=[\lambda(\mu x_1),\ \lambda(\mu x_2)]=[(\lambda\mu)x_1,\ (\lambda\mu)x_2]=(\lambda\mu)(x_1,\ x_2);$$

y, por último,

$$1(x_1,\ x_2)=(1x_1,\ 1x_2)=(x_1,\ x_2).$$

Luego es un espacio vectorial sobre K.

6. No, pues la suma de dos polinomios de grado n puede ser un polinomio de grado menor que n.

Párrafo 7.3.

1. Si $h=n$ no hay nada que demostrar. Sea $h<n$; la variedad lineal $L(x_1,\ \ldots,\ x_h)$ es de dimensión h, luego está contenida propiamente en V; existe, pues, un vector $x\in V$ y $x\notin L(x_1,\ \ldots,\ x_h)$. Este vector evidentemente, no depende linealmente de los $x_1,\ \ldots,\ x_h$, es decir, la familia $x_1,\ \ldots,\ x_h,\ x$ es libre. Si $h+1=n$, ya hemos terminado. En caso contrario, se repite el proceso y en un número finito de pasos se obtiene el resultado apetecido.

2. Es evidente que

$$V=L(x_1,\ \ldots\ x_h)+L(x_{h+1},\ \ldots,\ x_n).$$

Además, si

$$x\neq 0\ \text{ y }\ x\in L(x_1,\ \ldots,\ x_h)\cap L(x_{h+1},\ \ldots,\ x_n)\Longrightarrow x=\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_hx_h$$

y

$$x=\lambda_{h+1}x_{h+1}+\ldots+\lambda_nx_n\Longrightarrow 0=\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_hx_h-\lambda_{h+1}x_{h+1}-\ldots-\lambda_nx_n$$

y como por ser $x\neq 0$ no todas las λ_i son nulas, resultaría que los vectores $x_1,\ \ldots,\ x_h,\ x_{h+1},\ \ldots,\ x_n$ no serían linealmente independientes.

3. Si L es una variedad lineal de V, el máximo número de vectores de L linealmente independientes es $\leq n$, luego la dimensión de L es finita. Si valiera el signo igual, toda base de L lo sería de V y entonces $L=V$.

4. Sean $(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)$ y $(\lambda'_1,\ \ldots,\ \lambda'_n)$ las coordenadas del vector $x\in V$, respecto a las bases $\{u_i\}_{1\leq i\leq n}$ y $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$, respecto a la base $\{u_i\}_{1\leq i\leq n}$. Entonces

$$v_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}u_j,\quad x=\sum_{j=1}^{n}\lambda_ju_j=\sum_{i=1}^{n}\lambda'_iv=\sum_{i=1}^{n}\lambda'_i\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}u_j\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda'_i\alpha_{ij}\right)u_j\Longrightarrow\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\lambda'_i\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

que son las relaciones buscadas.

5. Si los vectores $\{x_i\}_{1\leq i\leq r}$ dependen linealmente de los $\{y_i\}_{1\leq i\leq s}\Longrightarrow$

$$x_i=\sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}y_j\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$$

Si los $\{y_i\}_{1\leq i\leq s}$ dependen linealmente de los $\{z_i\}_{1\leq i\leq t} \Longrightarrow$

$$y_j=\sum_{k=1}^{t}\mu_{jk}z_k \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$

y de ambas relaciones

$$x_i=\sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}\left(\sum_{k=1}^{t}\mu_{jk}z_k\right)=\sum_{k=1}^{t}\left(\sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}\mu_{jk}\right)z_k \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

que demuestra que los $\{x_i\}_{1\leq i\leq r}$ dependen linealmente de los $\{z_i\}_{1\leq i\leq t}$.

ú. Los vectores de dicha variedad lineal son de la forma

$$(\alpha_1,\ -\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_3).$$

Luego $(1,\ -1,\ 0,\ 1)$ y $(0,\ 0,\ 1,\ 1)$ constituyen un sistema de generadores; como además son linealmente independientes, pues si

$$\lambda(1,\ -1,\ 0,\ 1)+\mu(0,\ 0,\ 1,\ 1)=(0,\ 0,\ 0,\ 0) \Longrightarrow \lambda=4,\ -\mu=0,$$

son una base de la variedad lineal.

CAPITULO 8

Párrafo 8.1.

1. Sea $\{u_1, \ldots, u_h\}$ una base de núcleo de F y $\{u_{h+1}, \ldots, u_n\}$ una base de una variedad L, suplementaria de dicho núcleo. Sean $v_i=F(u_i)$ $(i=h+1, \ldots, n)$. Estos vectores v_i son linealmente independientes, pues si $\exists$ $\lambda_{h+1}, \ldots, \lambda_n$, no todas nulas, tales que

$$\sum_{i=h+1}^{n}\lambda_i v_i=0 \Longrightarrow 0=\sum_{i=h+1}^{n}\lambda_i F(u_i)=F\left(\sum_{i=h+1}^{n}\lambda_i u_i\right) \Longrightarrow \sum_{i=h+1}^{n}\lambda_i u_i$$

al núcleo de F, lo que contradice a lo supuesto. Además, si

$$x' \in F(V) \quad \exists \quad x \in V \mid F(x)=x',$$

pero

$$x=\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_h u_h+\alpha_{h+1}u_{h+1}+\ldots+\alpha_n u_n \Longrightarrow x'=F(x)=$$

$$=F\left(\sum_{i=1}^{h}\alpha_i u_i+\sum_{i=h+1}^{n}\alpha_i u_i\right)=F\left(\sum_{i=1}^{h}\alpha_i u_i\right)+F\left(\sum_{i=h+1}^{n}\alpha_i u_i\right)=$$

$$=0+\sum_{i=h+1}^{n}\alpha_i F(u_i)=\sum_{i=h+1}^{n}\alpha_i v_i,$$

luego la familia $\{v_i\}_{h+1\leq i\leq n}$ es un sistema de generadores de $F(V)$, y como es una familia libre, es una base de $F(V)$. En definitiva:

$$\dim F(V)=n-h=\dim L.$$

2. No necesariamente. Ejemplo: sea $F\colon K^4\longrightarrow K^2$ y $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de K. Los vectores $F(u_1)$, $F(u_2)$, $F(u_3)$, $F(u_4)$ son seguramente linealmente dependientes, ya que pertenecen a K^2 cuya dimensión es 2 y, sin embargo, los u_i son, por lo que hemos supuesto, linealmente independientes.

3. Elegida una base $\{u_i\}_{1\leq i\leq n}$ en V, todo vector $x\in V$ se expresa de manera única en la forma $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i$, la aplicación $F\colon V\longrightarrow K^n$ dada por

$$F(x)=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

es un isomorfismo. Su comprobación es fácil.

4. Si núcleo de $F=\{0\}$ y $F(x)=F(y)\Longrightarrow 0=F(x)-F(y)=F(x-y)\Longrightarrow$ $\Longrightarrow x-y\in$ núcleo de $F\Longrightarrow x-y=0\Longrightarrow x=y$, luego la condición es suficiente. La condición necesaria es inmediata.

Párrafo 8.2.

1. Por razones de brevedad lo razonaremos para $n=3$, $m=2$.
Sean $\{u_i\}_{1\leq i\leq 3}$ y $\{v_i\}_{1\leq i\leq 2}$ bases de V y V', respectivamente. Consideremos los homomorfismos F_{ij} de V en V' definidos por

$$F_{ij}(u_k)=\begin{cases} v_j & \text{si} \quad k=i \\ 0 & \text{si} \quad k\neq i \end{cases} \qquad \begin{matrix}(i=1,\ 2,\ 3)\\ (j=1,\ 2)\end{matrix}$$

Vamos a ver que dichos homomorfismos constituyen una base de $\mathcal{H}(V, V')$. En primer lugar, si $F\in\mathcal{H}(V, V')$ y x es un vector cualquiera de $V\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} F(x)&=F(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3)=\alpha_1F(u_1)+\alpha_2F(u_2)+\alpha_3F(u_3)=\\ &=\alpha_1(\beta_{11}v_1+\beta_{12}v_2)+\alpha_2(\beta_{21}v_1+\beta_{22}v_2)+\alpha_3(\beta_{31}v_1+\beta_{32}v_2)=\\ &=\beta_{11}F_{11}(x)+\beta_{12}F_{12}(x)+\beta_{21}F_{21}(x)+\beta_{22}F_{22}(x)+\beta_{31}F_{31}(x)+\beta_{32}F_{32}(x)=\\ &=[\beta_{11}F_{11}+\beta_{12}F_{12}+\beta_{21}F_{21}+\beta_{22}F_{22}+\beta_{31}F_{31}+\beta_{32}F_{32}](x)\Longrightarrow\\ \Longrightarrow F&=\beta_{11}F_{11}+\beta_{12}F_{12}+\beta_{21}F_{21}+\beta_{22}F_{22}+\beta_{31}F_{31}+\beta_{32}F_{32}, \end{aligned}$$

luego $\{F_{ij}\}_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}}$ es un sistema de generadores de $\mathcal{H}(V, V')$.

Son también linealmente independientes, pues si

$$\lambda_{11}F_{11}+\lambda_{12}F_{12}+\lambda_{21}F_{21}+\lambda_{22}F_{22}+\lambda_{31}F_{31}+\lambda_{32}F_{32}=\theta\Longrightarrow\ \forall\ x\in V\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \lambda_{11}F_{11}(x)+\lambda_{12}F_{12}(x)+\lambda_{21}F_{21}(x)+\lambda_{22}F_{22}(x)+\lambda_{31}F_{31}(x)+\lambda_{32}F_{32}(x)=\theta(x)=0\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow(\alpha_1\lambda_{11}+\alpha_2\lambda_{21}+\alpha_3\lambda_{31})v_1+(\alpha_1\lambda_{12}+\alpha_2\lambda_{22}+\alpha_3\lambda_{32})v_2=0$$
$$\Longrightarrow\begin{cases}\alpha_1\lambda_{11}+\alpha_2\lambda_{21}+\alpha_3\lambda_{31}=0\\ \alpha_1\lambda_{12}+\alpha_2\lambda_{22}+\alpha_3\lambda_{32}=0\end{cases}\quad\forall\quad\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\in K\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\lambda_{11}=\lambda_{21}=\lambda_{31}=\lambda_{12}=\lambda_{22}=\lambda_{32}=0.$$

2.

$$v_1=\sqrt{3}\,u_1+\sqrt{3}\,u_2+\sqrt{3}\,u_3$$

$$v_1=\frac{4\sqrt{3}}{3}u_1+\frac{4\sqrt{3}}{3}u_2+\frac{4\sqrt{3}}{3}u_3$$

$$v_1=\frac{\sqrt{2}}{2}u_1+\frac{\sqrt{2}}{2}u_2$$

Luego las ecuaciones de F son:

$$\lambda_1'=\sqrt{3}\,\lambda_1+\frac{4\sqrt{3}}{3}\lambda_2+\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_3$$

$$\lambda_2'=\sqrt{3}\,\lambda_1+\frac{4\sqrt{3}}{3}\lambda_2+\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_3$$

$$\lambda_3'=\sqrt{3}\,\lambda_1-\frac{4\sqrt{3}}{3}\lambda_2$$

3. Si $x \in$ núcleo de $F \Longrightarrow F(x)=0$, luego

$$0=\sqrt{3}\,\lambda_1+\frac{4\sqrt{3}}{3}\lambda_2+\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_3$$

$$0=\sqrt{3}\,\lambda_1+\frac{4\sqrt{3}}{3}\lambda_2+\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_3$$

$$0=\sqrt{3}\,\lambda_1-\frac{4\sqrt{3}}{3}\lambda_2$$

Luego teniendo en cuenta las ecuaciones 1.ª y 3.ª, resulta que los vectores pertenecientes al núcleo de F son de la forma:

$$\left(\lambda_1,\ \frac{3}{4}\lambda_1,\ -2\sqrt{6}\,\lambda_1\right)$$

El vector $\left(1,\ \frac{3}{4},\ -2\sqrt{6}\right)$ constituye una base de dicho núcleo, luego la dimensión de éste es 1.

4. Las ecuaciones de $F+G$ son:

$$\lambda_1'=4\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3$$
$$\lambda_2'=8\lambda_1+6\lambda_2-2\lambda_3$$

El núcleo de $F\dot{+}G$ es:

$$0=4\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3$$
$$0=8\lambda_1+6\lambda_2-2\lambda_3$$

o lo que es lo mismo $0=4\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3$, sus vectores son de la forma:

$$(\lambda_1, \lambda_2, 4\lambda_1+3\lambda_2)$$

y una base sería la constituida por los vectores $(1, 0, 4)$ y $(0, 1, 3)$.

Los vectores de $(F+G)(\mathcal{R}^3)$ son de la forma:

$$(k, 2k)$$

luego una base de dicha variedad lineal es la constituida por el vector:

$$(1, 2)$$

5. Las ecuaciones de F serán:

$$\lambda_1' = \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \alpha_{13}\lambda_3$$
$$\lambda_2' = \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \alpha_{23}\lambda_3$$

luego

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \mathrm{3}\alpha_{11} + \alpha_{13} \\
\mathrm{I} &= \mathrm{3}\alpha_{21} + \alpha_{23} \\
\mathrm{0} &= \mathrm{2}\alpha_{12} + \mathrm{2}\alpha_{13} \\
\mathrm{I} &= \mathrm{2}\alpha_{22} + \mathrm{2}\alpha_{23} \\
\mathrm{2} &= \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} \\
\mathrm{I} &= \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}
\end{aligned}$$

Restando de la 5.ª ecuación, multiplicada por 2, la 3.ª, obtenemos $\alpha_{11}=2$, valor que llevado a la 1.ª nos da $\alpha_{13}=0$ y de la 3.ª $\alpha_{12}=0$. Por un proceso análogo obtenemos $\alpha_{21}=3$, $\alpha_{23}=2$ y $\alpha_{22}=1$.

La matriz de F es, pues:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz de H (calculada por el mismo procedimiento), es

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Las matrices pedidas son:

$$\mathrm{A}\ 2F+3G \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}\ H \circ G \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}\ H \circ F \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

6.

$$\lambda_1' = \sqrt{3}\,\lambda_1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\lambda_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_3 =$$

$$\lambda_2' = \sqrt{3}\,\lambda_1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\lambda_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_3 =$$

$$\lambda_3' = \sqrt{3}\,\lambda_1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\lambda_2$$

Los vectores de $F(V)$ son de la forma:

$$(\lambda, \lambda, \mu).$$

Una base sería $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, luego la dimensión es 2.

7. Se supone que el módulo no varía

$$F(u_1)=\frac{\sqrt{3}}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2$$

$$F(u_2)=-\frac{1}{2}u_1+\frac{\sqrt{3}}{2}u_2$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

CAPITULO 9

Párrafo 9.1.

1. No son iguales, pues no tienen las mismas dimensiones.

2.

$$\begin{aligned} \bar{3}+\ x&=\bar{5} \Longrightarrow x=\bar{2} \\ y-\ \bar{1}&=\bar{0} \Longrightarrow y=\bar{1} \\ \bar{2}z&=\bar{1} \Longrightarrow z=\bar{4} \\ \bar{3}-\ t&=\bar{2} \Longrightarrow t=\bar{1} \\ \bar{5}+\ u&=\bar{3} \Longrightarrow u=\bar{5} \end{aligned}$$

3.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jk}=a_{ik}.$$

Párrafo 9.2.

1. Restando de la primera ecuación la segunda multiplicada por 3 y dividiendo por 11 el resultado, obtenemos:

$$Y=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2+2i & -11+2i & -5-6i \\ -3+i & 7-15i & -18-3i \end{pmatrix}$$

y despejando X en la segunda, después de sustituir Y por la matriz obtenida, tenemos que

$$X=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-5i & 11+6i & 18+4i \\ 2+3i & 21+10i & 12-9i \end{pmatrix}$$

2. Toda matriz escalar se puede escribir en la forma λI_n. Es inmediato que

$$\lambda I_n+\mu I_n=(\lambda+\mu)I_n$$

y

$$\alpha(\lambda I_n)=(\alpha\lambda)I_n$$

son también matrices escalares.

3. Se comprueba inmediatamente que la suma de dos matrices triangulares es también una matriz triangular, así como el producto de un escalar por matriz triangular. La dimensión de esta variedad lineal es

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

4. La suma de dos matrices de elementos números complejos es otra matriz de números complejos. El producto de un número real por una matriz de números complejos es nuevamente una matriz de números complejos. Se prueban inmediatamente las propiedades definidoras de un espacio vectorial. La dimensión es $2mn$. En efecto, se comprueba fácilmente que las matrices $\{E_{pq}, iE_{pq}\}_{\substack{1\leq p\leq m\\ 1\leq q\leq n}}$ forman una base de este espacio vectorial.

5.

$$\begin{pmatrix} 5 & 38 & -56 \\ 12 & 37 & 82 \\ 1 & -55 & 35 \\ -45 & 29 & 25 \end{pmatrix}$$

Párrafo 9.3.

1.

$$E_{pq}=(\alpha_{ij}) \quad \text{con} \quad \alpha_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j)=(p,q) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$E_{qs}=(\beta_{ij}) \quad \text{con} \quad \beta_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j)=(p,s) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

luego

$$E_{pq}E_{qs}=(\alpha_{ij})(\beta_{ij})=\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\beta_{kj}\right)$$

pero

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\beta_{kj}=\begin{cases} \alpha_{pq}\beta_{qs}=1 & \text{si} \quad (i,j)=(p,s) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

luego $E_{pq}E_{qs}=E_{ps}$. De manera análoga se vería que $E_{pq}E_{rs}=0$ si $q\neq r$.

2. En general no son ciertas por no ser el anillo conmutativo y por tener divisores de cero. Por ejemplo:

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

mientras que

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3\\1&2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix}0&12\\2&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&6\\2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&18\\4&12\end{pmatrix}.$$

También

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&4\\-9&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6\\-3&4\end{pmatrix}$$

y, no obstante,

$$\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}5&6\\-3&4\end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{pmatrix}\bar{2}\cdot\bar{0}+\bar{3}\cdot\bar{2}+\bar{0}\cdot\bar{3}&\bar{2}\cdot\bar{1}+\bar{3}\cdot\bar{4}+\bar{0}\cdot\bar{6}\\ \bar{1}\cdot\bar{0}+\bar{5}\cdot\bar{2}+\bar{4}\cdot\bar{3}&\bar{1}\cdot\bar{1}+\bar{5}\cdot\bar{4}+\bar{4}\cdot\bar{6}\\ \bar{3}\cdot\bar{0}+\bar{2}\cdot\bar{2}+\bar{1}\cdot\bar{3}&\bar{3}\cdot\bar{1}+\bar{2}\cdot\bar{4}+\bar{1}\cdot\bar{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{6}&\bar{0}\\ \bar{1}&\bar{3}\\ \bar{0}&\bar{3}\end{pmatrix}$$

4. Operando resulta:

$$\begin{pmatrix}2&5\\-10&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&5\\-10&15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-10+8&5+5+0\\-10+10+0&7-15+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix}3\cdot3-1\cdot0&-3\cdot1-1\cdot2&3\cdot1-1\cdot1\\2\cdot3+0\cdot0&-2\cdot1+0\cdot2&2\cdot1+0\cdot1\\1\cdot3+2\cdot0&-1\cdot1+2\cdot2&1\cdot1+2\cdot1\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix}-1\cdot3+0\cdot4+0\cdot2&1\cdot1-0\cdot1+0\cdot1&1\cdot4+0\cdot5+0\cdot2\\-0\cdot3+0\cdot4+1\cdot2&0\cdot1-0\cdot1+1\cdot1&0\cdot4+0\cdot5+1\cdot2\\-0\cdot3+1\cdot4+0\cdot2&0\cdot1+1\cdot1+0\cdot1&0\cdot4+1\cdot5+0\cdot2\end{pmatrix}+$$
$$+5\begin{pmatrix}0\cdot0+1\cdot0+0\cdot0&0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0&0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0\\0\cdot0+0\cdot0+1\cdot0&0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0&0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0\\0\cdot0+0\cdot0+0\cdot0&0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0&0\cdot0+0\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}9&-5&2\\6&-2&2\\3&3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&1&4\\2&1&2\\4&-1&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&5\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-4&11\\8&-1&4\\7&2&8\end{pmatrix}.$$

6.

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ca+dc&cb+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

luego:

$$\begin{aligned}a^2+bc&=a\\ab+bd&=b\\ca+dc&=c\\cb+d^2&=d\end{aligned}$$

y si 1.º

$$b \neq 0 \Longrightarrow \quad d = 1 - a \qquad c = \frac{a - a^2}{b}$$

y si 2.º

$$b = 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} a^2 = a \\ ca + dc = c \\ d^2 = d \end{array}$$

con los que las posibilidades son:

$a=0, \quad d=0, \quad c=0;$
$a=1, \quad d=1, \quad c=0;$
$a=1, \quad d=0, \quad c=$cualquier número real;
$a=0, \quad d=1, \quad c=$cualquier número real.

El conjunto pedido se compone, pues, de las matrices:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$$

y de las:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

siendo $b \neq 0$ y a y c números reales cualesquiera.

Párrafo 9.4.

1. Los bloques se indican mediante líneas de puntos:

$$\left(\begin{array}{cc:ccc} 2 & 0 & -3 & 5 & 7 \\ 5 & -2 & -6 & 0 & 0 \\ \hdashline 4 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 7 & 3 & 0 & -4 \\ \hdashline 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 5 \\ \hdashline 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \\ A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21} \end{pmatrix}$$

$$A_{11}B_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 11 & -12 & -20 \end{pmatrix}$$

$$A_{12}B_{21} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 51 & 69 \\ -18 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{21}B_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 7 \\ 32 & 42 & 23 \end{pmatrix}$$

$$A_{22}B_{21}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ 3 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -6 & -8\\ -11 & -18 & -28\end{pmatrix}$$

$$A_{31}B_{11}=(2 \quad 0)\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 2 & 6 & 5\end{pmatrix}=(6 \quad 0 \quad -4)$$

$$A_{32}B_{21}=(0 \quad 3 \quad 1)\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix}=(8 \quad 15 \quad 19)$$

de donde:

$$A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=\begin{pmatrix}37 & 51 & 65\\ -7 & -24 & -20\end{pmatrix}$$

$$A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=\begin{pmatrix}16 & 12 & -1\\ 21 & 24 & -5\end{pmatrix}$$

$$A_{31}B_{11}+A_{32}B_{21}=(14 \quad 15 \quad 15)$$

o sea que el producto pedido vale:

$$\begin{pmatrix}37 & 51 & 65\\ -7 & -24 & -20\\ 16 & 12 & -1\\ 21 & 24 & -5\\ 14 & 15 & 15\end{pmatrix}$$

Párrafo 9.5.

1. Si A es una matriz inversible, de

$$AX=AY \Longrightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}(AY) \Longrightarrow X=Y$$
$$XA=YA \Longrightarrow (XA)A^{-1}=(YA)A^{-1} \Longrightarrow X=Y$$

luego si una matriz es inversible es regular.

Para ver que toda matriz regular es inversible bastará que demostremos que toda matriz A no inversible no es regular. Pero esto es equivalente a demostrar que existe una matriz $X\neq 0$ tal que $AX=0$. Ahora bien, la ecuación matricial

$$AX=(a_{ij})(x_{ij})=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{kj}\right)=(0)$$

es equivalente a las n ecuaciones vectoriales

$$x_{1j}v_1+x_{2j}v_2+\ldots+x_{nj}v_n=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

donde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los vectores columna de A, pero al ser ésta no inversible, los v_i son linealmente dependientes y existen valores

$$\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \ldots, \lambda_{nj} \in K,$$

no todos nulos, verificando la relación:

$$\lambda_{1j}v_1+\lambda_{2j}v_2+\quad+\lambda_{nj}v_n=0$$

luego queda puesto de manifiesto la existencia de una matriz X no nula cumpliendo la condición exigida.

No, la afirmación no es cierta para una anillo cualquiera, ni aun siendo unitario. Por ejemplo, en el anillo Z, si $a\neq 0$:

$$ax=ay \Longrightarrow x=y$$

y, sin embargo, los únicos elementos inversibles son el 1 y el -1.

2. No, pues la suma de dos matrices regulares no es necesariamente una matriz regular. Por ejemplo, las matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

son regulares (los vectores $(3,-2)$ y $(1,3)$ son linealmente independientes e igual ocurre con los $(-3,2)$ y $(1,3)$) y, sin embargo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

no es regular. Véase el ejemplo segundo del Ej. 2 del párrafo [9.3].

3. De

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+2z & 3y+2t \\ x-4z & y-4t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x+2z=1 \\ x-4z=0 \\ 3y+2t=0 \\ y-4t=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7x=2 \ , & x=\dfrac{2}{7} \\ \\ 7y=1 \ , & y=\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

$$z=\frac{2}{28} \qquad t=\frac{-3}{14}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{2}{7} & \dfrac{1}{7} \\ \dfrac{1}{14} & -\dfrac{3}{14} \end{pmatrix}.$$

4. No, pues el vector $(2,4)$ y el $(4,8)$ son linealmente dependientes:

$$-2(2,4)+(4,8)=(0,0).$$

5. El sistema se puede escribir en formar matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por la izquierda ambos miembros de esta igualdad por A^{-1}, obtenemos:

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{21} & \frac{-1}{21} \\ \frac{2}{3} & \frac{-11}{21} & \frac{10}{21} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{26}{21} \\ \frac{97}{21} \\ -\frac{15}{21} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow x=\frac{26}{21}, \quad y=\frac{97}{21}, \quad z=\frac{-15}{21}.$$

6.

$$A\left[\frac{-1}{\omega_0}(a_nA^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\ldots+a_1I)\right]=I,$$

luego

$$A^{-1}=\frac{-1}{\omega_0}(a_nA^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\ldots+a_1I).$$

Párrafo 9.6.

1.

$$(A+A')'=A'+(A')'=A'+A=A+A'$$

luego $A+A'$ es simétrica.

$$(A-A')'=A'-(A')'=A'-A=-(A-A'),$$

por tanto, $A-A'$ es hemisimétrica.

Llamemos $S=A+A'$ y $H=A-A' \Longrightarrow A=\frac{1}{2}(S+H)$.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 4 & \frac{13}{2} \\ 0 & \frac{13}{2} & 10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Si $AA'=I$, transponiendo en ambos miembros $A'A=I'=I$, y, recíprocamente, si

$$AA'=I \quad \text{y} \quad BB'=I \Longrightarrow (AB)(AB)'=(AB)(B'A')=$$
$$=A(BB')A'=AIA'=AA'=I$$
$$A^{-1}=A',$$

luego

$$(A^{-1})(A^{-1})' = A'A = I.$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

De

$$AA' = I \Longrightarrow \begin{cases} a_{11}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \end{cases}$$

haciendo

$$a_{11} = \operatorname{sen}\alpha \Longrightarrow a_{12} = \cos\alpha \Longrightarrow a_{21} = \pm\cos\alpha \quad \text{y} \quad a_{22} = \mp\operatorname{sen}\alpha.$$

Luego

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$$

son todas las soluciones. α es un ángulo cualquiera.

CAPITULO 10

Párrafo 10.2.

1.

$$F(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} F(u_1, u_2, u_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot 4 = (-10) \cdot 8 \cdot 4 = -320.$$

2. La columna tercera es igual a la primera multiplicada por 2 menos la segunda multiplicada por 3.

3.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|B| = (-1)^{2+3-2}|A| = -|A|.$$

Párrafo 10.3.

1. 3.312.

2. Desarrollando por los elementos de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}.$$

3. Restando de cada fila la anterior multiplicada por u:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & v-u & x-u & \dots & y-u & z-u \\ 0 & v(v-u) & x(x-u) & \dots & y(y-u) & z(z-u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & v^{n-2}(v-u) & x^{n-2}(x-u) & \dots & y^{n-2}(y-u) & z^{n-2}(z-u) \end{vmatrix} =$$

$$= (v-u)(x-u) \dots (y-u)(z-u) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ v & x & \dots & y & z \\ v^2 & x^2 & \dots & y^2 & z^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v^{n-2} & x^{n-2} & \dots & y^{n-2} & z^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \dots = (v-u)(x-u) \dots (y-u)(z-u)$$
$$(x-v) \dots (y-v)(z-v)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(z-y).$$

4.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & z & y \\ -b & -z & 0 & x \\ -c & -y & -x & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \begin{vmatrix} 0 & ax & b & c \\ -a & 0 & z & y \\ -b & -zx & 0 & \\ -c & -yx & -x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{x} \begin{vmatrix} 0 & ax-by+cz & b & c \\ -a & -zy+yz & z & y \\ -b & -zx \quad +xz & 0 & x \\ -c & -yx+xy & -x & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \begin{vmatrix} 0 & ax-by+cz & b & c \\ -a & 0 & z & y \\ -b & 0 & 0 & x \\ -c & 0 & -x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{ax-by+cz}{x} \begin{vmatrix} -a & z & y \\ -b & 0 & x \\ -c & -x & 0 \end{vmatrix} = -\frac{ax-by+cz}{x}(-cxz+bxy-ax^2) =$$

$$= (-ax+by-cz)^2.$$

5. Si se suman las tres últimas columnas a la primera, se pone en evidencia el factor $x+y+z+t$; sumando la segunda columna a la primera y restando las dos últimas, se pone de manifiesto el factor $x+y-z-t$. De forma análoga se vería que el determinante admite a $x-y+z-t$ y $x-y-z+t$ como divisores, luego

$$\Delta=k(x+y+z+t)(x+y-z-t)(x-y+z-t)(x-y-z+t);$$

como el término procedente de la diagonal principal x^4 lleva el coeficiente $1 \Longrightarrow k=1$.

6.

$$\begin{vmatrix} 2+3i & 1-i & 4 \\ 1-2i & i & 1+i \\ -2 & 1 & 2-3i \end{vmatrix} = 12+11i$$

7.

$$\begin{vmatrix} 14-x & 66 & -42 \\ 4 & 24-x & -14 \\ 10 & 55 & -33-x \end{vmatrix} = -x^3+5x^2-8x+4=(x-1)(x-2)^2.$$

8.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix} =$$

$$= a_0 \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix} =$$

$=a_0x^n+$un determinante semejante al dado, pero de orden disminuido en una unidad$=\dots=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n$.

Párrafo 10.4.

1. Si

$$AA'=I \Longrightarrow |AA'|=|A||A'|=|A|^2=1 \Longrightarrow |A|=\pm 1.$$

2.

$$|B-xI_n|=|CAC^{-1}-xI_n|=|C(A-xI_n)C|=$$
$$=|C||A-xI_n||C|^{-1}=|A-xI|.$$

3.

$$A\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 6 & 1\\ 5 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & -7 & -3\\ -10 & -23 & -5\\ -21 & -12 & -7\end{pmatrix}$$

$$A=-\frac{\begin{vmatrix}10 & 7 & 3\\ 10 & 23 & 5\\ 21 & 12 & 7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 6 & 1\\ 5 & 2 & 0\end{vmatrix}}=\frac{166}{115}.$$

4.

$$|A|^2=|A^2|=\begin{vmatrix}1+x^2+x^4+x^6 & x+x^3+x^5+x^3 & x^2+x^4+x^2+x^4 & x^3+x+x^3+x^5\\ x+x^3+x^5+x^3 & x^2+x^4+x^6+1 & x^3+x^5+x^3+x & x^4+x^2+x^4+x^2\\ x^2+x^4+x^2+x^4 & x^3+x^5+x^3+x & x^4+x^6+1+x^2 & x^5+x^3+x+x^3\\ x^3+x+x^3+x^5 & x^4+x^2+x^4+x^2 & x^5+x^3+x+x^3 & x^6+1+x^2+x^4\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-27.$$

Párrafo 10.5.

1.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{8}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{2} & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$|A-xI_3|=-x^3+6x^2-11x+6=(x-1)(x-2)(x-3).$$

Las raíces son 1, 2 y 3.

3.

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}M_{p\times p} & N_{p\times q}\\ R_{q\times p} & S_{q\times q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{p\times p} & Y_{p\times q}\\ Z_{q\times p} & T_{q\times q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}MX+NZ & MY+NT\\ RX+SZ & RY+ST\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}MX+NZ=I_p\\ MY+NT=0\\ RX+SZ=0\\ RY+ST=I_q\end{cases}$$

Multiplicando la tercera ecuación por la izquierda por

$$S^{-1} \Longrightarrow S^{-1}RX+Z=0 \Longrightarrow$$

$$\text{(I)} \qquad Z=-S^{-1}RX$$

valor que llevado a la primera nos da:

$$\text{(II)} \qquad X=(M-NS^{-1}R)^{-1}$$

De la cuarta:

$$S^{-1}RY+T=S^{-1} \Longrightarrow T=S^{-1}-S^{-1}RY,$$

valor que llevado a la segunda nos proporciona:

$$\text{(III)} \qquad Y=-NS^{-1}X$$

luego

$$\text{(IV)} \qquad T=S^{-1}-S^{-1}RY.$$

Puesto que A^{-1} existe, también existen las matrices X, Y, Z y T y la regularidad de S garantiza la existencia de S^{-1}, la cual permite el cálculo de X, Y, Z, T. Naturalmente, debe calcularse primero X.

Párrafo 10.6.

1. El rango es 2.

2. El rango es 2.

3.

$$rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=3 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

luego los vectores $(2, 1, -1, 0)$, $(3, 0, 1, 1)$ y $(5, 1, 0, 2)$ forman base.

4.

$\begin{vmatrix} 7 & -12 & 23 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}=0$, luego los 3 vectores son linealmente dependientes.

5.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & -2 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & -2 \\ -5 & 6 & -11 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & 6 & -11 \end{vmatrix}=0$$

sólo el tercero.

6.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -6 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$, luego el vector $(0, 0, 1, 0)$ sirve, pues

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ -6 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -6 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} \neq 0.$$

7.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 20 & 12 & -8 \end{vmatrix} = 0.$$

Luego

$$(2, 4, -6), \ (20, 12, -8) \in L\{3, -1, 4), \ (5, 3, -2)\}$$

8. Se comprueba fácilmente que los monomios

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} \qquad \text{con} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = p,$$

$p_i \in N \cup \{0\}$ son una base, luego la dimensión es igual al número de términos de un polinomio homogéneo completo de grado p en n indeterminadas que, como se sabe, es

$$\binom{n+p-1}{p}.$$

9.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 6 \\ 14 & 9 & 18 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Son linealmente independientes.

CAPITULO 11

Párrafo 11.2.

1.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, luego es un sistema de Cramer.

La solución es:

$$x=2, \quad y=-1, \quad z=5, \quad t=4.$$

2.

$$\begin{vmatrix} 2-i & i & 1+i \\ 4 & -2 & i \\ 1 & -1+i & 0 \end{vmatrix} = -4+3i, \quad x=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i, \quad y=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i, \quad z=0.$$

3. $x=2, \quad y=4, \quad z=3.$

4. La tercera ecuación del primer sistema es igual a la primera multiplicada por 2 más la segunda por 2, luego dicho sistema es equivalente al

$$\begin{aligned} -3x+2y- \ z&=0 \\ 5x+6y+2z&=3. \end{aligned}$$

La primera ecuación del segundo sistema es igual a la primera del anterior por 3 veces más la segunda; la segunda es igual a la primera más 2 veces la segunda.

5. No, pues

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -5 & 1 & -4 \\ -10 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 0.$$

6. La variedad lineal es la engendrada por los vectores v_1 y v_2, pues $v_3=2v_1+v_2$. Para que $(-3, \alpha, 7, \beta) \in L(v_1, v_2)$ se tiene que verificar:

$$\left.\begin{aligned} -3&=\lambda_1-4\lambda_2 \\ \alpha&=\quad 3\lambda_2 \\ 7&=\lambda_1+\lambda_2 \\ \beta&=3\lambda_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{De la primera y tercera } \lambda_1=5, \quad \lambda_2=2, \text{ lugeo } \alpha=6 \text{ y } \beta=15.$$

7.

$$\left.\begin{aligned} 1&=\lambda_1+\lambda_2 \\ 4&=\quad \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 \\ 4&=\lambda_1 \quad +\lambda_3 \\ 3&=\quad \lambda_2 \quad +\lambda_4 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lambda_1=3, \quad \lambda_2=-2, \quad \lambda_3=1, \quad \lambda_4=5.$$

$$\left.\begin{aligned} 6&=\mu_1+\mu_2 \\ 2&=\quad \mu_2+\mu_3+\mu_4 \\ 1&=\mu_1 \quad +\mu_3 \\ 2&=\quad \mu_2 \quad +\mu_4 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \mu_1=1, \quad \mu_2=5, \quad \mu_3=0, \quad \mu_4=-3.$$

Párrafo 11.3.

1.

$$rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \neq rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = 3,$$

luego no ϵ compatible.

2.

$$rg\begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & -6 & -26 \\ 1 & 4 & 22 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -6 \\ 1 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 2,$$

por tanto, sí pertenece.

3.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -10 \\ 2 & -6 & -4 & -20 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & -20 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

luego sí pertenece.

4. En ambos casos la variedad lineal es la misma. En el Ej. 2 los vectores $(3, 2, 1, 4)$ y $(1, -6, 4, -2)$ son linealmente independientes y la expresión del vector $(11, -26, 22, -2)$ como combinación lineal de ellos es única —lo que se traduce en que el sistema sea compatible y determinado—. En el Ej. 3 los tres vectores dados son linealmente dependientes y por eso la expresión de $(-10, -20, 4, -20)$ como combinación lineal de los mismos no es única—lo que equivale a que el sistema sea compatible e indeterminado.

5. Los vectores $(-6, 4, -10, -8)$ y $(4, -2, 10, 2)$ dependen linealmente de los $(3, -2, 5, 4)$ y $(1, 0, 5, -2)$, y estos últimos son linealmente independientes. Los vectores (x_1, x_2, x_3, x_4) de la variedad lineal se obtendrán dando en las expresiones

$$\begin{aligned} x_1 &= 3\lambda + \mu \\ x_2 &= -2\lambda \\ x_3 &= 5\lambda - 5\mu \\ x_4 &= 4\lambda - 2\mu \end{aligned}$$

todos los valores posibles a λ y μ.

6.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6),$$

luego para valores de λ distintos de 2, 3 y 6 el sistema es de Cramer.

$$\text{Para } \lambda = 2 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

luego el sistema es compatible e indeterminado.

$$\text{Para } \lambda = 3 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ por tanto, el sistema es incompatible.}$$

Para $\lambda=6 \Longrightarrow \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ y el sistema es incompatible.

7.

$$|A|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & \lambda\mu \end{vmatrix}=3-\lambda\mu+2\lambda.$$

Si $\lambda=\dfrac{3}{\mu-2} \Longleftrightarrow |A|=0$, luego para $\lambda\neq\dfrac{3}{\mu-2}$ el sistema es de Cramer.

Para $\lambda=\dfrac{3}{\mu-2} \Longrightarrow rg\cdot A=2$,

$$B=\begin{pmatrix} \dfrac{3}{\mu-2} & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \mu \\ -1 & 2 & \dfrac{3\mu}{\mu-2} & \dfrac{3}{\mu-2} \end{pmatrix}$$

pára que $rg\cdot B=2$, basta que

$$0=\begin{vmatrix} \dfrac{3}{\mu-2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \mu \\ -1 & 2 & \dfrac{3}{\mu-2} \end{vmatrix} = -\mu-\frac{3}{\mu-2}-\frac{6\mu}{\mu-2} \Longrightarrow \mu^2+4\mu+3= (\mu+1)(\mu+3).$$

Si $\mu=-1 \Longrightarrow \lambda=\dfrac{3}{\mu-2}=-1$. Para estos valores de λ y μ el sistema es compatible e indeterminado.

Si $\mu=-3 \Longrightarrow \lambda=\dfrac{3}{\mu-2}=-\dfrac{3}{5}$, para cuyos valores de λ y μ el sistema también es compatible e indeterminado.

En los restantes casos el sistema es incompatible.

8.

$$\begin{aligned} -19&= 3x_1+ 5x_3+ 6x_2 \\ -20&= x_1- 2x_2+ 4x_3 \\ -77&=10x_1+13x_2+22x_3 \end{aligned}$$

$$rg\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \\ 10 & 13 & 22 \end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & -19 \\ 1 & -2 & 4 & -20 \\ 10 & 13 & 22 & -77 \end{pmatrix}=2.$$

El sistema es equivalente al

$$\begin{aligned} 3x_1+5x_2&=-19-6x_3 \\ x_1-2x_2&=-20-4x_3 \end{aligned}$$

Los vectores pedidos son los de la forma

$$\left(\frac{-138-32x_3}{11}, \frac{41+6x_3}{11}, x_3\right).$$

Párrafo 11.4.

1.

$$rg\begin{pmatrix} 12 & 66 & -42 \\ 4 & 22 & -14 \\ 10 & 55 & -35 \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow x = \frac{-11y+7z}{2}.$$

2.

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 - x_3 + 2x_4 \\ 0 &= x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 &= 3x_1 + x_3 \\ 0 &= -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = -8 \neq 0,$$

luego el sistema no tiene más solución que la trivial, por tanto, el núcleo se reduce al cero y el endomorfismo es un automorfismo.

3.

$$\begin{aligned} x_1 &= 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ x_2 &= 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 \\ x_3 &= 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{-\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}} \Longrightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{4} = \frac{x_3}{2},$$

luego los vectores pedidos son los de la forma $(\lambda, 2\lambda, \lambda)$.

4.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 4\lambda - 13),$$

luego $|A| = 0$ para $\lambda = 1$, $\lambda = 2+3i$, $\lambda = 2-3i$.

Para $\lambda = 1 \Longrightarrow x = z, \quad y = 2z.$
Para $\lambda = 2+3i \Longrightarrow x = \frac{1}{4}(3-3i)z, \quad y = \frac{1}{4}(5-3i)z.$
Para $\lambda = 2-3i \Longrightarrow x = \frac{1}{4}(3+3i)z, \quad y = \frac{1}{4}(5+3i)z.$

5.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\lambda & 4\\ 1 & \mu & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & \rho\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\neq 0$$

$$\begin{vmatrix}3 & 2\lambda & 4\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-2\lambda-4=0 \quad \text{para} \quad \lambda=-2,$$

$$\begin{vmatrix}1 & \mu & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\mu-1=0 \quad \text{para} \quad \mu=-1,$$

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & \rho\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\rho-1=0 \quad \text{para} \quad \rho=1.$$

6.

$$\left.\begin{aligned}\lambda x_1&=-9x_1+19x_2+4x_3\\ \lambda x_2&=-3x_1+7x_2+x_3\\ \lambda x_3&=-7x_1+17x_2+2x_3\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned}(-9-\lambda)x_1+&19x_2+&4x_3=0\\ -3x_1+(7-\lambda)x_2+&&x_3=0\\ -7x_1+&17x_2+(2-\lambda)x_3=0\end{aligned}\right.$$

$$\begin{vmatrix}-9-\lambda & 19 & 4\\ -3 & 7-\lambda & 1\\ -8 & 17 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3-\lambda=-\lambda(\lambda^2+1)=-\lambda(\lambda+i)(\lambda-i),$$

luego no hay ningún vector que cumpla la condición pedida.

7.

$$rg\begin{pmatrix}3 & -3 & -3\\ -5 & 5 & 5\\ 4 & -6 & -14\\ -2 & 4 & 12\\ 1 & 0 & 4\\ 8 & -7 & -3\end{pmatrix}=2, \quad \text{luego} \quad x=-4z, \quad y=-5z.$$

8. Si $w=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ y $u=(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ son soluciones del sistema, es fácil comprobar que $w+v$ y λw $\forall$ $\lambda \in K$, también lo son.

Los $n-r$ vectores:

$$\begin{aligned}v_1 &= (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1r}, 1, 0, \ldots, 0)\\ v_2 &= (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2r}, 0, 1, \ldots, 0)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ v_{n-r} &= (\alpha_{n-r,1}, \ldots, \alpha_{n-r,r}, 0, 0, \ldots, 1)\end{aligned}$$

soluciones del sistema correspondientes a los valores sugeridos de las $n-r$ incógnitas no principales, son linealmente independientes, pues la matriz for-

mada con sus componentes es de rango $n-r$, ya que en ella figura el siguiente menor principal:

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & (n-r \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Si $w=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n)$ es otra solución, se tiene que

$$w=\lambda_{r+1}v_1+\lambda_{r+2}v_2+\ldots+\lambda_n v_{n-r}$$

luego los vectores $\{v_i\}_{1\leq i\leq n-r}$ son un sistema de generadores del conjunto de vectores solución del sistema. Esto, junto con lo anterior, demuestra que los vectores $\{v_i\}_{1\leq i\leq n-r}$ constituyen una base de la variedad lineal de todas las soluciones del sistema.

CAPITULO 12

Párrafo 12.1.

1.

$$\begin{matrix}(3 & -1 & 4)=(\ 1 & 0 & \ \ 2)B \\ (2 & 0 & 2)=(-2 & 1 & -4)B \\ (1 & -1 & 4)=(-1 & 1 & \ \ 0)B\end{matrix} \iff \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} B \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ 8 & -2 & 10 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es la ecuación matricial del cambio de base. Despejando X^*:

$$X=X^*\begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ 8 & -2 & 10 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mal - Veer ficha

$$X^*=X\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -6 & \frac{5}{2} & -11 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{luego} \quad \begin{aligned} v_1&= 7u_1+ 8u_2-2u_3 \\ v_2&=-u_1- 2u_2 \\ v_3&= 6u_1+10u_2- u_3 \end{aligned}$$

2.

$$X^*=X\begin{pmatrix}1&0&3\\1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$$

$$X^*=X^{**}\begin{pmatrix}3&1&5\\2&-2&4\\-3&1&-1\end{pmatrix}\Longrightarrow X^{**}=X^*\begin{pmatrix}\frac{1}{18}&\frac{-1}{6}&\frac{-7}{18}\\\frac{5}{18}&\frac{-1}{3}&\frac{1}{18}\\\frac{1}{9}&\frac{1}{6}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}$$

y, por tanto:

$$X^{**}=X\begin{pmatrix}1&0&3\\1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{18}&\frac{-1}{6}&\frac{-7}{18}\\\frac{5}{18}&\frac{-1}{3}&\frac{1}{18}\\\frac{1}{9}&\frac{1}{6}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}=X\begin{pmatrix}\frac{7}{18}&\frac{1}{3}&\frac{5}{18}\\\frac{4}{9}&\frac{-1}{3}&\frac{-1}{9}\\\frac{5}{18}&\frac{1}{6}&\frac{1}{18}\end{pmatrix}$$

3. En este caso se tendría:

$$v_1=\frac{\sqrt{3}}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2$$

$$v_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}u_1-\frac{\sqrt{2}}{2}u_2$$

con los que las ecuaciones del cambio serían las

$$X=X^*\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{-\sqrt{2}}{2}&\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix};\quad X^*=X\begin{pmatrix}\frac{-2}{1-\sqrt{3}}&\frac{-\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}\\\frac{2}{1-\sqrt{3}}&\frac{\sqrt{6}}{1-\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

Párrafo 12.2.

1. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\3&0&1&1\\5&1&0&2\\1&-1&2&1\\1&2&-3&-1\end{pmatrix}$$

es 3, pues $\begin{vmatrix}2&1&0\\3&0&1\\5&1&2\end{vmatrix}=-3\neq 0$

y son nulos todos los menores de orden 4 por ser las filas cuarta y quinta combinación lineal de las primera y segunda.

Las ecuaciones paramétricas serán:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\lambda_1+3\lambda_2+5\lambda_3 \\ x_2 &= \lambda_1 + \lambda_3 \\ x_3 &= -\lambda_1+\lambda_2 \\ x_4 &= \lambda_2+2\lambda_3 \end{aligned}$$

Las ecuaciones no paramétricas se reducen a la

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

que desarrollada da:

$$x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0.$$

Una base de la variedad lineal que estudiamos estaría constituida por los vectores:

$$(2, 1, -1, 0), \quad (3, 0, 1, 1), \quad (5, 1, 0, 2).$$

2. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 5+i & 2+2i & 2+i \\ -1 & 5-i & 1+2i & 0 \\ 3 & -5+3i & -2i & 2+i \end{pmatrix}$$

es 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & 5+i \\ -1 & 5-i \end{vmatrix} = 10 \neq 0$ y la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras.

De entre las cuatro ecuaciones que se obtienen al anular las menores de tercer orden en la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 5+i & 2+2i & 2+i \\ -1 & 5-i & 1+2i & 0 \end{pmatrix}$$

sólo dos serán linealmente independientes y éstas constituirán las ecuaciones no paramétricas de la variedad lineal. Estas serán las

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 5+i & 2+2i \\ -1 & 5-i & 1+2i \end{vmatrix} = 0 \iff (-9+2i)x_1 - (3+4i)x_2 + 10x_3 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ 1 & 5+i & 2+i \\ -1 & 5-i & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff -(11+3i)x_1 - (2+i)x_2 + 10x_4 = 0.$$

Comprobado

3.

$$L_1 = \{(1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 1, -1)\}$$
$$L_2 = \{(0, 1, 0, 0),\ (1, 0, 1, -1)\}$$

$$L_1 \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_2 \\ x_4 = -\lambda_2 \end{cases}, \quad rg \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow$$

$$L_1 \equiv \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$L_2 \equiv \begin{cases} x_1 = \mu_2 \\ x_2 = \mu_1 \\ x_3 = \mu_2 \\ x_4 = -\mu_2 \end{cases}, \quad rg \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow$$

$$L_2 \equiv \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

luego $(L_1 \cup L_2) = \{(1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 1, -1),\ (0, 1, 0, 0)\}$.

$$(L_1 \cup L_2) \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 + \lambda_3 \\ x_3 = \lambda_2 \\ x_4 = -\lambda_2 \end{cases}, \quad rg \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (L_1 \cup L_2) \equiv x_3 + x_4 = 0.$$

$$L_1 \cap L_2 \equiv \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

luego la cuarta ecuación es combinación lineal de las tres primeras, por lo que

$$L_1 \cap L_2 \equiv \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Haciendo $x_1 = \lambda \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = -\lambda. \end{cases}$

4.

$$rg\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

luego

$$L \equiv \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = x_5 \\ -x_1 + x_2 = 2x_4 - 3x_5 \\ x_2 = x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

haciendo $x_4 = \lambda, \quad x_5 = \mu \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -\lambda + \mu \\ x_2 = \lambda - 2\mu \\ x_3 = 5\lambda - 7\mu \\ x_4 = \lambda \\ x_5 = \mu \end{cases}$

5. $L_1 = \{(2, 4, 3, 0)\}, \quad L_2 = \{(2, 0, 3, -4), (0, 1, 0, 1)\}.$

$$rg\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

luego

$$(L_1 \cup L_2) = \begin{cases} x_1 = 2\lambda + 2\mu \\ x_2 = 4\lambda \\ x_3 = 3\lambda + 3\mu \\ x_4 = -4\mu \end{cases}$$

y los vectores $(2, 4, 3, 0)$, $(2, 0, 3, -4)$ forman una base de $(L_1 \cup L_2)$.

6.

$$L_1 \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda + \mu \\ x_2 = -2\lambda + \mu \\ x_3 = 3\lambda + \mu \end{cases} ; \qquad L_2 \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3\rho \\ x_3 = 2\rho \end{cases}$$

Si $x \in L_1 \cap L_2 \Longrightarrow \begin{cases} x \in L_1 \\ x \in L_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -2\lambda + \mu = -3\rho \\ 3\lambda + \mu = 2\rho \end{cases} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -2\lambda + \mu + 3\rho = 0 \\ 3\lambda + \mu - 2\rho = 0 \end{cases} ; \qquad rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -2\lambda + \mu = 3\rho \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = \rho \\ \mu = -\rho \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow L_1 \cap L_2 \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda + \mu = 0 \\ x_2 = -2\lambda + \mu = -3\rho \\ x_3 = 3\lambda + \mu = 2\rho \end{cases}, \quad \text{es decir,} \quad L_1 \cap L_2 = L_2.$$

Se podía haber visto más rápidamente comprobando que $L_2 \subset L_1$, lo cual es consecuencia inmediata de ser

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

7. Si

$$x \in L_1 \Longrightarrow x = \alpha(1, -1, 1) + \beta(0, 1, 0),$$

y si

$$x \in L_2 \Longrightarrow x = \gamma(3, -5, 7),$$

luego como

$$x \in L_1 \cap L_2 \Longrightarrow \alpha(1, -1, 1) + \beta(0, 1. 0) = \gamma(3, -5, 7) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha \quad -3\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ \alpha \quad -7\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \quad \text{por tanto,} \quad L_1 \cap L_2 = \{0\}.$$

8. $(-5, 1, 0, 1)$, $(2, -3, 1, 0)$.

$$\left.\begin{array}{rl} 7 = & -5x_1 + 2x_2 \\ -4 = & x_1 + 3x_2 \\ 1 = & x_2 \\ -1 = & x_1 \end{array}\right\} (-1, 1).$$

9.

$$x = \lambda_1(1. -2, 7) + \lambda_2(-3, 1, -9) = \mu_1(3, 4, -3) + \mu_2(3, -6, 21),$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_2 = 3\mu_1 + 3\mu_2 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = 4\mu_1 - 6\mu_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3\mu_1 + 3\mu_2 \\ \lambda_2 = -2\mu_1 \end{cases}$$

Párrafo 12.3. pag 155

1.

$$F_1 \equiv X^* = X \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \equiv X^* = X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\text{dim. } F_1(R^3) = rg \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3.$$

$$\dim.\ F_2(R^3)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=3.$$

$$\dim.\ (F_1+F_2)(R^3)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}=3.$$

$$\text{núcleo de } F_1+F_2\equiv\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3=0\\ 2x_1=0\\ 2x_2+2x_3=0\\ 2x_1+3x_2=0\end{cases}$$

pero este sistema no admite más solución que la trivial, luego

$$\text{núcleo de } F_1+F_2=\{0\}.$$

2. Si $Y=XA$ es la ecuación matricial de la aplicación, tenemos que

$$\left.\begin{array}{l}(1\ \ 1)=(-2\ \ 1\ \ 1)A\\ (0\ \ 1)=(1\ \ 0\ \ 1)A\\ (-1\ \ 2)=(2\ \ 1\ -1)A\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$\dim.\ F(R^3)=\operatorname{rg}\ A=2.$$

$$\text{núcleo } F\equiv\begin{cases}-x_1+x_3=0\\ x_1+3x_2+x_3=0\end{cases},$$

como las dos ecuaciones son linealmente independientes,

$$\dim.\ \text{núcleo } F=1.$$

Los vectores $(1,0,2)$ y $(0,1,1)$ no pertenecen al núcleo de F, luego

$$L=(1,0,2),\ (0,1,1)$$

sería una variedad suplementaria del núcleo.

3.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = 3 = \dim.\ F(R^4).$$

Una base de $F(R_4)$ sería la constituida por los vectores:

$$(1, 0, 0, 1),\ (2, -1, 1, 3)\ \text{y}\ (1, 0, 2, 1).$$

JAR'23

índice general

PÁG.

PRÓLOGO ... 5

INTRODUCCIÓN ... 7

1. **Teoría de conjuntos** ... 9
   - 1.1. Conceptos previos y notación ... 9
   - 1.2. Relación de inclusión y conjunto de las partes de un conjunto dado ... 11
   - 1.3. Operaciones elementales ... 12
   - 1.4. Producto de conjuntos ... 16

2. **El concepto de función** ... 18
   - 2.1. Ideas de relación binaria, función y aplicación ... 18
   - 2.2. Aplicaciones sobreyectivas, inyectivas y biyectivas ... 24
   - 2.3. Función inversa ... 25
   - 2.4. Conjuntos equipotentes. Conjuntos infinitos ... 26
   - 2.5. Concepto de familia. Extensión de las operaciones $\cup$ y $\cap$ a una familia de conjuntos ... 27
   - 2.6. Recubrimiento y partición de un conjunto ... 29
   - 2.7. Composición de aplicaciones ... 30

3. **Relaciones de equivalencia** ... 32
   - 3.1. Definición de relación de equivalencia ... 32
   - 3.2. Clases de equivalencia, representantes de clase y conjunto cociente ... 33

4. **Relaciones de orden** ... 36
   - 4.1. Definición ... 36
   - 4.2. Cotas, extremos, elementos maximales y minimales ... 37
   - 4.3. Buena ordenación. Lema de Zorn ... 39

5. **Grupos** ... 41
   - 5.1. Grupos, generalidades ... 43
   - 5.2. Subgrupos, subgrupos normales ... 47

PÁG.

5.3. Grupo cociente. Homomorfismo. Isomorfismo. Teorema de isomorfía ... 52
5.4. Grupos finitos ... 55

6. Anillos y cuerpos ... 57
6.1. Anillos. Dominios de integridad. Cuerpos ... 57
6.2. Subanillos. Ideales. Homomorfismos ... 61
6.3. Anillo cociente ... 64
6.4. Anillos euclídeos ... 65
6.5. Anillos de polinomios ... 67

7. Espacios vectoriales ... 71
7.1. Vectores. Vectores libres ... 71
7.2. Espacios vectoriales. Variedades lineales ... 76
7.3. Dependencia lineal ... 81

8. Aplicaciones lineales ... 86
8.1. Aplicaciones lineales, propiedades ... 86
8.2. El espacio vectorial de las aplicaciones lineales. Anillo de endomorfismos de un espacio vectorial ... 89

9. Matrices ... 99
9.1. Matrices, generalidades y notación ... 99
9.2. El espacio vectorial de las matrices de dimensiones $m \times n$. 101
9.3. El anillo de las martices cuadradas de orden n ... 103
9.4. Producto por bloques ... 107
9.5. Matrices inversibles ... 109
9.6. Matrices transpuestas ... 113

10. Determinantes ... 116
10.1. Aplicaciones multilineales ... 116
10.2. Determinantes, definición y propiedades ... 117
10.3. Cálculo del determinante de una matriz. Desarrollo por los elementos de una línea ... 122
10.4. Producto de determinantes ... 127
10.5. Caracterización de las matrices regulares. Matrices singulares. Cálculo de la matriz inversa de una matriz regular. 129
10.6. Caracterización y cálculo del rango de una matriz ... 132

11. Sistemas de ecuaciones lineales ... 138
11.1. Definiciones y notación ... 138
11.2. Sistema de Cramer ... 139
11.3. Teorema de Rouché-Frobenius ... 141
11.4. Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales ... 144

PÁG.

12. Aplicación de la teoría de matrices y determinantes a los espacios vectoriales ... 148
12.1. Cambio de base ... 148
12.2. Ecuaciones paramétricas y no paramétricas de las variedades lineales ... 151
12.3. Dimensión de la imagen de una aplicación lineal ... 154

Soluciones a los ejercicios ... 156
Capítulo 1 ... 156
Capítulo 2 ... 158
Capítulo 3 ... 163
Capítulo 4 ... 164
Capítulo 5 ... 165
Capítulo 6 ... 171
Capítulo 7 ... 176
Capítulo 8 ... 181
Capítulo 9 ... 185
Capítulo 10 ... 192
Capítulo 11 ... 197
Capítulo 12 ... 203

JAR'23

JAR'23

JAR'23

JAR'23

JAR'23